3.000 problemas de análisis matemático

B.P.Demidóvich

Traducido del ruso por:
EMILIANO APARICIO BERNARDO

Doctor (Kandidat) en Ciencias Físico-Matemáticas por
la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú,
Catedrático de Universidad,
Profesor Emérito de la Universidad del País Vasco

JONÁS

9ª Edición



THOMSON™

Australia • Canadá • México • Singapur • España • Reino Unido • Estados Unidos

THOMSON

5000 problemas de análisis matemático

Gerente Editorial Área Universitaria:
Andrés Otero Reguera

Editoras de Producción:
Clara Mª de la Fuente Rojo
Consuelo García Asensio

Producción Industrial:
Susana Pavón Sánchez

Título original:
СБОРНИК
ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

Traducido del ruso por:
Emiliano Aparicio
Bernardo

Novena edición, revisada por el traductor.

Impresión:
CLM.
Eduardo Marconi, 3.
Polig. Ind. Codein.
Fuenlabrada (Madrid)

9ª edición, 3ª reimpresión, 2003

Magallanes, 25; 28015 Madrid
ESPAÑA
Teléfono: 91 4463350
Fax: 91 4456218
clientes@paraninfo.es
www.paraninfo.es

Impreso en España
Printed in Spain

ISBN: 84-9732-141-3
Depósito Legal: M-28.112-2003

(062/71/27)

Otras delegaciones:

Mexico y Centroamerica
Tel. (525) 281-29-06
Fax (525) 281-26-56
clientes@mail.internet.com.mx
clientes@thomsonlearning.com.mx
Mexico, D.F.

Puerto Rico
Tel. (787) 758-75-80 y 81
Fax (787) 758-75-73
thomson@coqui.net
Hato Rey

Chile
Tel. (562) 531-26-47
Fax (562) 524-46-88
devoregr@netexpress.cl
Santiago

Costa Rica
EDISA
Tel./Fax (506) 235-69-55
edisacr@sol.racsa.co.cr
San José

Colombia
Tel. (571) 340-94-70
Fax (571) 340-94-75
clithomson@andinet.com
Bogotá

Cono Sur
Pasaje Santa Rosa, 5141
C.P. 141 - Ciudad de Buenos Aires
Tel. 4833-3838/3583 - 4831-0764
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos aires (Argentina)

República Dominicana
Caribbean Marketing Services
Tel. (809) 533-26-27
Fax (809) 533-18-82
cms@codetel.net.do

Bolivia
Librerías Asociadas, S.R.L.
Tel./Fax (591) 2244-53-09
libras@datacom-bo.net
La Paz

Venezuela
Ediciones Ramville
Tel. (582) 793-20-92 y 782-29-21
Fax (582) 793-65-66
tclibros@attglobal.net
Caracas

El Salvador
The Bookshop, S.A. de C.V.
Tel. (503) 243-70-17
Fax (503) 243-12-90
amorales@sal.gbm.net
San Salvador

Guatemala
Textos, S.A.
Tel. (502) 368-01-48
Fax (502) 368-15-70
textos@infovia.com.gt
Guatemala

INDICE

Página

Página

SEGUNDA PARTE

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

APENDICES

PROLOGO DEL TRADUCTOR

El presente libro contiene alrededor de 4.500 problemas y ejercicios de análisis matemático y abarca la gran mayoría de los temas que se estudian durante los dos primeros años en el curso de Análisis Matemático en la Facultad Mecánico-matemática de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú. La orientación de la colección se debe al programa de análisis matemático vigente durante muchos años en esta Facultad.

El autor del libro, profesor B.P. Demidóvich, es bien conocido en España y América Latina por otro libro de problemas de 10 autores del mismo tema, revisado por el profesor B.P. Demidóvich, pero destinado a los centros de enseñanza técnica superior y de gran utilidad también para los cursos de Matemáticas Generales. Este libro ha sido reeditado por la Editorial Paraninfo.

El libro que ahora presentamos en castellano está destinado a las especialidades de matemática y física de las Universidades y a las especialidades de ingeniería que tienen un programa ampliado de matemática. Naturalmente, la enorme cantidad de problemas y ejercicios diversos que se proponen son suficientes para poder aprender a manejar bien las técnicas del cálculo. En la mayoría de los casos, al final del libro se da la solución. Como no conocemos en castellano colección alguna de problemas de análisis matemático tan completa, creemos que el presente libro podrá cubrir las necesidades en esta materia de las Universidades de habla hispánica. En la traducción se ha creído conveniente conservar todas las notaciones matemáticas empleadas por el autor.

La presente traducción se ha hecho de la séptima edición rusa.

Emiliano APARICIO BERNARDO

PROLOGO
A LA EDICION ESPAÑOLA

La presente colección contiene gran número de problemas y ejercicios, tanto de carácter práctico como teórico, referentes al análisis matemático clásico. Está destinado a los estudiantes de los primeros cursos de las Universidades e Institutos Pedagógicos). Los párrafos del libro van acompañados de unas introducciones teóricas breves y de una lista de fórmulas que, no obstante, no pretenden dar una exposición sistemática de la teoría. Algunos de los enunciados de los teoremas son de carácter práctico y sólo sirven para recordar al lector los resultados principales del análisis matemático; además, se supone que ya se conocen los capítulos correspondientes de la teoría.*

En la colección no figuran problemas relacionados con la topología elemental, análisis funcional, etc., puesto que en las universidades de la Unión Soviética este material se expone ordinariamente en los cursos superiores y no figura en el curso del análisis matemático.

Durante la confección de la presente colección se utilizaron parcialmente algunos tratados y guías de análisis matemático. En particular, se han tomado algunos problemas de los libros: N. M. Guiúnter y R. O. Kuzsmín: "Colección de problemas de matemática superior", 10.ª ed., Moscú-Leningrado, año 1933; R. Buck: "Advanced Calculus" (New York-Toronto-London, 1956); Dr. D. S. Mitrionovic: "Zbornik matematickih problema, I (Boegrad, 1958).

Espero que la versión castellana de la presente colección le permita al lector obtener una idea de la enseñanza del análisis matemático en las universidades de la U.R.S.S.

B. P. DEMIDOVICH
Profesor de la Universidad de Moscú

---

*) Los Institutos Pedagógicos en La Unión Soviética son Centros de Enseñanza Superior de preparación de Profesores de Enseñanza Media.

NOTA: Por dificultades tipográficas y para evitar errores en la reproducción de las fórmulas, se ha conservado la terminología de "sin" en lugar de "sen" como indicación de "seno".

Capítulo 1 INTRODUCCION AL ANALISIS.

§ 1. Los números reales

1.° *Método de inducción matemática.* Para demostrar que un teorema es válido para cualquier número natural n, es suficiente demostrar que: 1) el teorema es válido para $n = 1$, 2) si el teorema es válido para algún número natural n, entonces también es válido para el siguiente número natural $n + 1$.

2.° *Cortadura.* Una partición del conjunto de los números racionales en dos clases A y B se llama cortadura si se cumplen las condiciones siguientes: 1) ambas clases no están vacías; 2) todo número racional pertenece a una clase y sólo a una; 3) cualquier número perteneciente a la clase A (clase inferior) es menor que cualquier número perteneciente a la clase B (clase superior). Una cortadura A/B determina: a) un número racional, si en la clase inferior A hay un número máximo o si en la clase superior B hay un número mínimo; b) un número irracional, si la clase A no posee un número máximo y la clase B no posee un número mínimo. Los números racionales e irracionales se denominan números reales*).

3.° *Valor absoluto.* Si x es un número real, se llama valor absoluto $|x|$ al número no negativo que se determina por las condiciones siguientes:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Para cualesquiera números reales x e y se verifican las desigualdades:

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4.° *Extremo superior (supremo) y extremo inferior (ínfimo).* Sea $X = \{x\}$ un conjunto acotado de números reales. El número

$$m = \inf\{x\}$$

se llama extremo inferior o ínfimo del conjunto X, si:

---

*) A continuación; si no hay ningún inconveniente, el vocablo "número" significará un número real.

1) cualquier $x \in X$*) cumple la desigualdad

$$x \geqslant m;$$

2) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $x' \in X$ tal que

$$x' < m + \varepsilon.$$

De un modo similar, el número

$$M = \sup \{x\}$$

se llama extremo superior o supremo del conjunto X, si:

1) todo $x \in X$ cumple la desigualdad

$$x \leqslant M,$$

2) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $x'' \in X$ tal que

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Si el conjunto X no está acotado inferiormente, se dice que

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

si el conjunto X no está acotado superiormente, se dice que

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

3.° *Errores absoluto y relativo.* Si a ($a \neq 0$) es el valor exacto de la magnitud que se mide, y x es el valor aproximado de esta magnitud, entonces

$$\Delta = |x - a|$$

se llama error absoluto, y

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

se llama error relativo de la magnitud que se mide.

Se dice que el número x tiene n cifras exactas, si el error absoluto de este número no excede de la mitad de una unidad del orden de la n-ésima cifra significativa.

*) La expresión $x \in X$ significa que el número x pertenece al conjunto X.

Problemas:

Aplicando el método de inducción matemática, demostrar que para cualquier número natural n se verifican las siguientes igualdades:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.
4. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
5. Sea

$$a^{[n]} = a(a-h)\ldots[a-(n-1)h] \text{ y } a^{[0]} = 1.$$

Demostrar que

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

donde C_n^m es el número de combinaciones m-arias de n elementos. Deducir de aquí la fórmula del binomio de Newton.

6. Demostrar la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números de un mismo signo, mayores que -1.

7. Demostrar que, si $x > -1$, se verifica la desigualdad

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad (n > 1),$$

donde el signo de igualdad se verifica solamente para $x = 0$.

8. Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{para } n > 1.$$

Indicación. Aplicar la desigualdad

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

9. Demostrar la desigualdad

$$2! \cdot 4! \ldots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{para } n > 1.$$

10. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Demostrar las desigualdades:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $\quad (n\geqslant 2)$;

b) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $\quad (n\geqslant 3)$;

c) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$

$$(0\leqslant x_k\leqslant\pi;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

d) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

11. Supongamos que c es un número entero positivo que no es el cuadrado exacto de un número entero, y que A/B es una cortadura que determina el número real $\sqrt{c}$, donde pertenecen a la clase B todos los números racionales positivos b, tales que $b^2>c$, y a la clase A, todos los demás números racionales. Demostrar que en la clase A no hay un número máximo y en la clase B no hay un número mínimo.

12. La cortadura A/B que determina al número $\sqrt[3]{2}$, se forma del modo siguiente:

La clase A contiene todos los números racionales a, tales que $a^3<2$; la clase B contiene todos los demás números racionales. Demostrar que en la clase A no hay un número máximo y que en la clase B no hay un número mínimo.

13. Construyendo las cortaduras correspondientes, demostrar las igualdades:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; $\quad$ b) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. Construir la cortadura que determina el número $2^{\sqrt{2}}$.

15. Demostrar que todo conjunto numérico no vacío, que está acotado inferiormente, tiene un extremo inferior (ínfimo), y que todo conjunto numérico no vacío, que está acotado superiormente, tiene un extremo superior (supremo).

16. Comprobar que el conjunto de todas las fracciones racionales propias

$$\frac{m}{n},$$

donde m y n son números naturales y $0<m<n$, no tiene elementos mínimo y máximo. Hallar el ínfimo y el supremo de este conjunto.

17. Determinar el ínfimo y el supremo del conjunto de los números racionales r que cumplen la desigualdad

$$r^2<2.$$

18. Sea $\{-x\}$ el conjunto de los números opuestos a los números $x\in\{x\}$.

Demostrar que

a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$; b) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

19. Sea $\{x+y\}$ el conjunto de todas las sumas $x+y$, donde $x\in\{x\}, y\in\{y\}$.

Demostrar las igualdades:

a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. Sea $\{xy\}$ el conjunto de todos los productos xy, donde $x\in\{x\}, y\in\{y\}$, siendo $x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

Demostrar las igualdades:

a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$; b) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

21. Demostrar las desigualdades:

a) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$;

b) $|x+x_1+\ldots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\ldots+|x_n|)$.

Resolver las desigualdades:

22. $|x+1|<0{,}01$.

23. $|x-2|\geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$.

25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$.

29. $|x(1-x)|<0{,}05$.

30. Demostrar la identidad

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. Midiendo una longitud de 10 cm, el error absoluto era de 0,5 mm; al medir una distancia de 500 km, el error absoluto era igual a 200 m. ¿Qué medición es más exacta?

32. Determinar la cantidad de cifras exactas que tiene el número

$$x = 2{,}3752,$$

si el error relativo del mismo es 1 %.

33. El número

$$x = 12{,}125$$

tiene 3 cifras exactas. Calcular el error relativo de este número.

34. Los lados de un rectángulo son iguales a

$$x = 2{,}50 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$y = 4{,}00 \text{ cm} \pm 0{,}02 \text{ cm}.$$

¿Entre qué límites está comprendida el área S de este rectángulo? ¿Cuáles son el error absoluto Δ y el error relativo δ del área del rectángulo, si se toman por lados sus valores medios?

35. El peso de un cuerpo $p = 12{,}59\ g \pm 0{,}01\ g$ y su volumen $v = 3{,}2$ cm$^3 \pm 0{,}2$ cm^3. Calcular el peso específico del cuerpo y acotar los errores absoluto y relativo del peso específico, si por peso del cuerpo y volumen se toman los valores medios.

36. El radio de un círculo es igual a

$$r = 7{,}2 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}.$$

¿Con qué error relativo mínimo puede determinarse el área del círculo, si se toma $\pi = 3{,}14$?

37. Las medidas de un paralelepípedo rectangular son:

$$x = 24{,}7 \text{ m} \pm 0{,}2 \text{ m},$$
$$y = 6{,}5 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m},$$
$$z = 1{,}2 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}.$$

¿Entre qué límites está comprendido el volumen v de este paralelepípedo? ¿Con qué errores absoluto y relativo puede determinarse el volumen de este paralelepípedo, si por medidas del mismo se toman sus valores medios?

38. ¿Con qué error absoluto se debe medir el lado de un cuadrado x, donde $2 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$, para tener la posibilidad de medir el área del mismo con una exactitud hasta de 0,001 m^2?

39. ¿Con qué errores absolutos Δ es suficiente medir los lados x e y de un rectángulo para poder calcular su área con una exactitud hasta de 0,01 m^2, si los lados no miden más de unos 10 m, aproximadamente?

40. Sean $\delta(x)$ y $\delta(y)$ los errores relativos de los números x e y, y sea $\delta(xy)$ el error relativo del número xy.
Demostrar que

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\,\delta(y).$$

§ 2. Teoría de las sucesiones

1.° *Concepto de límite de una sucesión.* Se dice que el límite de la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es el número a (o abreviadamente, que converge hacia a), es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $N = N(\varepsilon)$ tal, que

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ para } n > N.$$

En particular, x_n se llama infinitamente pequeño, o infinitésimo, si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Una sucesión que carece de límite se llama divergente.

2.° *Criterios de existencia de límite.*

1) Si

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

y

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Una sucesión monótona y acotada tiene límite.

3) Criterio de Cauchy. Para la existencia de límite de una sucesión $\{x_n\}$, es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$, exista un número $N = N(\varepsilon)$, tal que

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

para cualesquiera $n > N$ y $p > 0$.

3.° *Teoremas fundamentales de los límites de las sucesiones.* Suponiendo que existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n,$$

se tiene:

1) si $x_n \leqslant y_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4.° *El número e.* La sucesión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

tiene un límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,8284\ldots$$

5.° *Límite infinito.* La expresión simbólica

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

denota que, cualquiera que sea el número $E>0$, existe un número $N=N(E)$, tal que

$$|x_n| > E \text{ para } n > N.$$

6.° *Punto de acumulación.* El número ξ (o el símbolo ∞) se llama límite parcial (o punto de acumulación) de una sucesión x_n ($n=1$, 2, ...), si existe una subsucesión (o sucesión parcial)

$$x_{p_1},\ x_{p_2},\ \ldots,\ x_{p_n},\ \ldots \quad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Toda sucesión acotada tiene al menos un límite parcial finito (principio de Bolzano-Weierstrass). Si este límite parcial es único, entonces, éste es el límite finito de la sucesión dada.

El límite parcial mínimo (finito o infinito) de la sucesión x_n

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

se llama límite inferior, y el límite parcial máximo

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

límite superior.

La igualdad

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

es condición necesaria y suficiente para la existencia de límite (finito o infinito) de la sucesión x_n.

Problemas:

41. Sea

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

hallando para cada $\varepsilon > 0$ un número $N = N(\varepsilon)$, tal que

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ para } n > N.$$

Rellenar la tabla siguiente:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Demostrar que x_n ($n=1$, 2, ...) es infinitamente pequeña (o sea, que tiene límite, igual a 0), indicando, para cualquier $\varepsilon > 0$, un número $N = N(\varepsilon)$ tal que sea $|x_n| < \varepsilon$ para $n > N$, si

a) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; c) $x_n = \dfrac{1}{n!}$;

b) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$; d) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Rellenar la tabla que se da a continuación en cada uno de estos casos:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. Demostrar que las sucesiones

a) $x_n = (-1)^n n$, b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, c) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

tienen límite infinito cuando $n \to \infty$ (o sea, que son infinitamente grandes o infinitas), hallando, para cualquier $E > 0$, un número $N = N(E)$ tal que sea $|x_n| > E$ para $n > N$.

Rellenar la tabla que se da a continuación en cada uno de estos casos:

E	10	100	1000	10 000	...
N					

44. Comprobar que

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

no está acotada, a pesar de que no es infinitamente grande cuando $n \to \infty$.

45. Formular, mediante desigualdades, las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Suponiendo que n recorre la sucesión natural de números, calcular los valores de las siguientes expresiones:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\,000n}{n^2+1}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

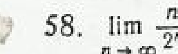
54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$.

Demostrar las siguientes igualdades:



58. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, si $|q| < 1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ $(a > 1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

67. ¿Qué expresión es mayor para valores suficientemente grandes de n:

a) $100n+200$ o $0{,}01n^2$?; b) 2^n o n^{1000}?; c) 1000^n o $n!$?

68. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

Indicación. Véase el ejercicio 10.

69. Demostrar que la sucesión

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

monótona creciente y está acotada superiormente, mientras que la
cesión

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

monótona decreciente y está acotada inferiormente. Deducir de esto
e estas sucesiones tienen un límite común

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Indicación. Formar las razones $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ y aplicar la desigualdad
ejercicio 7.

70. Demostrar que

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{3}{n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

ra qué valores del exponente n la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diferirá del
mero e menos que 0,001?

71. Sea p_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ una sucesión arbitraria de números que
de hacia $+\infty$, y sea q_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ una sucesión arbitraria de
eros que tiende hacia $-\infty$ $(p_n, q_n \bar{\in} [-1, 0])$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

2. Sabiendo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

ostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

educir de aquí la fórmula

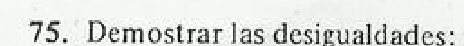
$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

de $0<\theta_n<1$, y calcular el número e con una exactitud hasta

. Demostrar que el número e es irracional.

. Demostrar la desigualdad

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$



75. Demostrar las desigualdades:

a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

donde n es un número natural arbitrario;

b) $1+\alpha<e^{\alpha}$,

donde α es un número real, distinto de cero.

76. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a \qquad (a>0),$$

donde $\ln a$ es el logaritmo del número a de base $e=2{,}718\ldots$

Aplicando el teorema de la existencia de límite de una sucesión monótona y acotada, demostrar la convergencia de las siguientes sucesiones:

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$,

donde p_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ son números enteros no negativos, no superiores a 9, comenzando desde p_1.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n=$

$$=\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n\text{ raíces}}},\ \ldots$$

Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de las siguientes sucesiones:

82. $x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$,

donde

$$|a_k|<M\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \text{ y } |q|<1.$$

83. $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

Indicación. Aplicar la desigualdad

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

86. Una sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ se dice que es de variación acotada, si existe un número C tal que

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|<C \quad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Demostrar que una sucesión de variación acotada es convergente. Dar un ejemplo de una sucesión convergente que no sea de variación acotada.

87. Explicar qué significa que para una sucesión dada no se verifica el criterio de Cauchy.

88. Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar que la sucesión

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

es divergente.

89. Demostrar que, si una sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es convergente, entonces cualquier subsucesión de la misma x_{p_n} también es convergente y tiene el mismo límite:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Demostrar que una sucesión monótona es convergente, si es convergente alguna subsucesión de la misma.

91. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

tiene

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Si $x_n \to a$, ¿qué se puede afirmar respecto del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Demostrar que una sucesión numérica convergente es acotada.

94. Demostrar que una sucesión numérica convergente, o bien alcanza el supremo, o bien alcanza el ínfimo, o bien el uno y el otro. Dar ejemplos de sucesiones de los tres tipos.

95. Demostrar que una sucesión numérica x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ que tiende hacia $+\infty$, necesariamente alcanza el ínfimo.

Hallar el término máximo de la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, si

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$. 97. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$. 98. $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

Hallar el término mínimo de la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, si

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. 100. $x_n = n + \frac{100}{n}$.

Para la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, hallar $\inf x_n$, $\sup x_n$ $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ y $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$, si:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. 102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

101.1. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$.

103. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$. 108. $x_n = n^{(-1)^n}$.

106. $x_n = (-1)^n n$. 109. $x_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$. 110. $x_n = \frac{1}{n-10{,}2}$.

Hallar

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

si:

111. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$. 114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$.

112. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$. 115. $x_n = \cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

113. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

Hallar los límites parciales de las siguientes sucesiones:

116. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$

117. $1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

118. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$

119. $x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n.$

120. $x_n = \frac{1}{2}\left[(a+b) + (-1)^n\ (a-b)\right].$

121. Dar un ejemplo de una sucesión numérica cuyos límites parciales sean unos números dados

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p.$$

122. Dar un ejemplo de una sucesión numérica para la cual, todos los términos de una sucesión numérica dada

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

sean sus límites parciales. ¿Qué límites parciales más tiene necesariamente la sucesión construida?

123. Dar un ejemplo de sucesión que:
a) no tenga límites parciales finitos;
b) tenga un límite parcial finito único, pero que no sea convergente;
c) tenga un conjunto infinito de límites parciales;
d) tenga como límite parcial cualquier número real.

124. Demostrar que las sucesiones x_n e $y_n = x_n\sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tienen unos mismos límites parciales.

125. Demostrar que de una sucesión acotada x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ siempre se puede extraer una subsucesión convergente x_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

126. Demostrar que, si una sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ no está acotada, entonces existe una subsucesión x_{p_n} tal, que

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. Supongamos que la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es convergente y que la sucesión y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es divergente. ¿Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de las sucesiones:

a) $x_n + y_n$; b) $x_n y_n$?

Poner ejemplos correspondientes.

128. Supongamos que las sucesiones x_n e y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ son divergentes. ¿Se puede afirmar que las sucesiones

a) $x_n + y_n$; b) $x_n y_n$

también son divergentes?

Poner ejemplos correspondientes.

129. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

y sea y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión arbitraria. ¿Se puede afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

Poner ejemplos correspondientes.

130. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

¿Se deduce de aquí que, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

Examinar el ejemplo: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

131. Demostrar que

a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

y

b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se verifiquen las desigualdades estrictas.

132. Supongamos que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Demostrar que

a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

y

b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se verifiquen las desigualdades estrictas.

133. Demostrar que, si existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, entonces, para cualquier sucesión y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, se tiene:

a) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

y

b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ $(x_n \geqslant 0)$.

134. Demostrar que, si para una sucesión x_n $(n=1, 2, \ldots)$ y para …ualquier sucesión y_n $(n=1, 2, \ldots)$, se verifica al menos una de las …ualdades:

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n$

…o bien

b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n \quad (x_n\geqslant 0),$

…la sucesión x_n es convergente.

135. Demostrar que, si $x_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n}=1,$$

…sucesión x_n es convergente.

136. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n=1, 2, \ldots)$ está acotada y

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0,$$

…entonces los límites parciales de esta sucesión están situados densamen…e entre sus límites inferior y superior:

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \quad \text{y} \quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,$$

…decir, cualquier número del segmento [l, L] es un límite parcial de la …cesión dada.

137. Supongamos que la sucesión numérica $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ cumple …condición

$$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n \quad (m,\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Demostrar que existe $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$.

138. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n=1, 2, \ldots)$ es convergente, la …esión de las medias aritméticas

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

…mbién es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Lo recíproco no es justo. Poner un ejemplo.

139. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n=1, 2, \ldots)$ es convergente y $x_n>0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

141. Demostrar que, si $x_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n},$$

suponiendo que el límite que figura en el segundo miembro existe.

142. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

143. Demostrar el teorema de Stolz: si

a) $y_{n+1}>y_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$,

c) existe $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$,

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. Calcular

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lg n}{n}$.

145. Demostrar que, si p es un número natural, se tiene

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\dfrac{2^p}{p+1}$.

146. Demostrar que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

es convergente.

Por lo tanto, se verifica la fórmula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

donde $C = 0{,}577216\ldots$ es la llamada constante de Euler y $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

147. Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right).$$

148. La sucesión de números x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ se determina por las siguientes fórmulas:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Calcular

$$\lim_{n \to \infty} x_n.$$

149. Sea x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión de números, definida por la siguiente fórmula:

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

150. Demostrar que las sucesiones x_n e y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, definidas por las siguientes fórmulas:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

tienen un límite común

$$\mu(a, b) = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n$$

(la media aritmético-geométrica de los números a y b).

§ 3. Concepto de función

1°. *Concepto de función.* La variable y se llama función uniforme f de la variable x en un campo dado de variación $X = \{x\}$, si a cada valor $x \in X$ se ha puesto en correspondencia un valor real determinado $y = f(x)$, perteneciente a cierto conjunto $Y = \{y\}$.

El conjunto X se denomina campo de definición o campo de existencia de la función $f(x)$; Y se llama conjunto de valores de esta función. En los casos más simples, el conjunto X representa o un intervalo abierto (intervalo) (a, b): $a < x < b$, o los intervalos semiabiertos $(a, b]$: $a < x \leqslant b$ y $[a, b)$: $a \leqslant x < b$, o un intervalo cerrado (segmento) $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, donde a y b son unos números reales o bien, los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ (en este caso se excluyen las igualdades).

Si a cada valor x de X le corresponde uno o varios valores de $y = f(x)$, entonces y se llama función multiforme de x.

2.° *Función inversa.* Si se entiende por x cualquier valor que satisfaga a la ecuación

$$f(x) = y,$$

donde y es un número fijo, perteneciente al conjunto de valores Y de la función $f(x)$, entonces, generalmente, esta correspondencia determina en el conjunto Y, una función multiforme

$$x = f^{-1}(y),$$

denominada inversa con respecto a la función $f(x)$. Si la función $y = f(x)$ es monótona en sentido estricto, es decir, $f(x_2) > f(x_1)$ (o, respectivamente, $f(x_2) < f(x_1)$) para $x_2 > x_1$, entonces la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es uniforme y monótona en el mismo sentido.

Problemas:

Determinar los campos de existencia de las siguientes funciones:

151. $y = \frac{x^2}{1+x}$.

152. $y = \sqrt{3x - x^3}$.

153. $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

154. a) $y = \log(x^2 - 4)$;

b) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

156. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

157. $y = \lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

158. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

159. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$.

160. $y = \arccos(2 \sin x)$.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

162. $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

165.2. $y=\sqrt{\lg\lg x}$.

165. $y=(2x)!$

165.1. $y=\log_2\log_3\log_4 x$.

165.3. $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

Determinar los campos de existencia y los conjuntos de valores de las siguientes funciones:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

168. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

169. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

170. $y=(-1)^x$.

171. En el triángulo ABC (fig. 1), cuya base $AC=b$ y su altura $BD=h$, está inscrito un rectángulo $KLMN$, cuya altura es $NM=x$. Expresar el perímetro P del rectángulo $KLMN$ y su área S en función de x.

Construir las gráficas de las funciones $P=P(x)$ y $S=S(x)$.

172. En el triángulo ABC, el lado $AB=6$ cm, el lado $AC=8$ cm y el ángulo $BAC=x$. Expresar $BC=a$ y el área $ABC=S$ en función de la variable x. Construir las gráficas de las funciones $a=a(x)$ y $S=S(x)$.

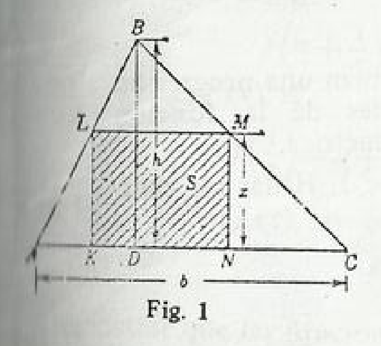


Fig. 1

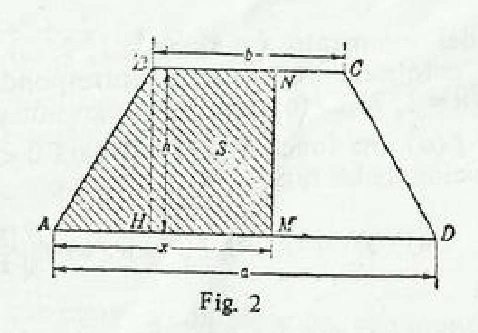


Fig. 2

173. En un trapecio isósceles $ABCD$ (fig. 2), cuyas bases son $AD=a$ y $BC=b$ $(a>b)$, y la altura es $HB=h$, está trazada una recta $MN \parallel HB$ que pasa a la distancia $AM=x$ del vértice A. Expresar el área S de la figura $ABNMA$ en función de la variable x. Construir la gráfica de la función $S=S(x)$.

174. En el segmento $0\leqslant x\leqslant 1$ del eje Ox está distribuida uniformemente una masa, igual a 2 g, y en los puntos $x=2$ y $x=3$ de este eje están situadas masas concentradas de 1 g cada una. Formar la expresión analítica de la función $m=m(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, cuyo valor numérico es igual a la masa situada en el intervalo $(-\infty, x)$, y construir la gráfica de esta función.

175. La función $y=sgn\ x$ se define del modo siguiente:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & \text{si } x<0;\\ 0, & \text{si } x=0;\\ 1, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Construir la gráfica de esta función. Verificar que

$$|x|=x\operatorname{sgn} x.$$

176. La función $y=[x]$ (la parte entera del número x) se define del modo siguiente:

Si $x=n+r$, donde n es un número entero y $0\leqslant r<1$, entonces $[x]=n$.

Construir la gráfica de esta función.

177. Supongamos que

$$y=\pi(x)\qquad(x\geqslant 0)$$

denota la cantidad de números primos que no son superiores al número x. Construir la gráfica de esta función para los valores del argumento $0\leqslant x\leqslant 20$.

¿En qué conjunto E_y transforma la función $y=f(x)$ el conjunto E_x, si:

178. $y=x^2$, $E_x=\{-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

179. $y=\lg x$, $E_x=\{10<x<1000\}$.

180. $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x$, $E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

181. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$, $E_x=\{0<|x|\leqslant 1\}$.

182. $y=|x|$, $E_x=\{1\leqslant|x|\leqslant 2\}$.

La variable x recorre el intervalo $0<x<1$. ¿Qué conjunto recorre la variable y, si

183. $y=a+(b-a)x$.

184. $y=\frac{1}{1-x}$.

185. $y=\frac{x}{2x-1}$.

186. $y=\sqrt{x-x^2}$.

187. $y=\operatorname{ctg}\pi x$.

188. $y=x+[2x]$.

189. Calcular $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$, si

$$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x.$$

$$f(x)=\lg x^2.$$

191. Calcular $f(0,9)$, $f(0,99)$, $f(0,999)$, $f(1)$, si

$$f(x)=1+[x].$$

192. Calcular $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, si

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{para } -\infty<x\leqslant 0, \\ 2^x & \text{para } 0<x<+\infty. \end{cases}$$

193. Calcular $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, si

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

194. Hallar los valores de x, para los cuales: 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$, si

a) $f(x)=x-x^3$; b) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$; c) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

195. Hallar

$$\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

si: a) $f(x)=ax+b$; b) $f(x)=x^2$; c) $f(x)=a^x$.

196. Sea

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Verificar que

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0.$$

197. Hallar una función lineal entera

$$f(x)=ax+b,$$

si $f(0)=-2$ y $f(3)=5$.

¿A qué son iguales $f(1)$ y $f(2)$ (interpolación lineal)?

198. Hallar una función racional entera de segundo grado:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

si

$$f(-2)=0,\quad f(0)=1,\quad f(1)=5.$$

¿A qué son iguales $f(-1)$ y $f(0,5)$ (interpolación cuadrática)?

199. Hallar una función racional entera de tercer grado:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

si

$$f(-1)=0,\quad f(0)=2,\quad f(1)=-3,\quad f(2)=5.$$

200. Hallar una función de la forma

$$f(x)=a+bc^x,$$

si

$$f(0)=15,\quad f(2)=30,\quad f(4)=90.$$

201. Demostrar que, si para una función lineal

$$f(x)=ax+b$$

los valores del argumento $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ forman una progresión aritmética, entonces los valores correspondientes de la función $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ también forman una progresión aritmética.

202. Demostrar que, si para la función exponencial

$$f(x)=a^x \quad (a>0)$$

los valores del argumento $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ forman una progresión aritmética, entonces los valores correspondientes de la función $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ forman una progresión geométrica.

203. Sea $f(u)$ una función definida para $0<u<1$. Hallar los campos de definición de las funciones:

a) $f(\sin x)$; b) $f(\ln x)$; c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Sea

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \qquad (a>0).$$

Verificar que

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. Supongamos que

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

Determinar z, si:

a) $f(x)=ax$; c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $(|x|<1)$;

b) $f(x)=\frac{1}{x}$; d) $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$.

Hallar $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ y $\psi[\varphi(x)]$, si

206. $\varphi(x)=x^2$ y $\psi(x)=2^x$,

207. $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$ y $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0, \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$ y $\psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0, \\ -x^2 & \text{si } x>0. \end{cases}$

209. Hallar $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, si

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

210. Sea

$$f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ veces}}.$$

Hallar $f_n(x)$, si

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

211. Hallar $f(x)$, si

$$f(x+1)=x^2-3x+2.$$

212. Hallar $f(x)$, si

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \quad (|x|\geqslant 2).$$

213. Hallar $f(x)$, si

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2} \quad (x>0).$$

213.1. Hallar $f(x)$, si

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2.$$

Demostrar que las funciones que siguen a continuación, son monótonas crecientes en los intervalos indicados:

214. $f(x)=x^2$ $\quad (0\leqslant x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x$ $\quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\operatorname{tg} x$ $\quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$.

Demostrar que las funciones que siguen a continuación, son monótonas decrecientes en los intervalos indicados:

218. $f(x)=x^2\,(-\infty<x\leqslant 0)$. 219. $f(x)=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

220. $f(x)=\operatorname{ctg} x$ $\quad (0<x<\pi)$.

221. Averiguar si son monótonas las siguientes funciones:

a) $f(x)=ax+b$; d) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$;

b) $f(x)=ax^2+bx+c$; e) $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

c) $f(x)=x^3$;

222. ¿Es posible pasar a logaritmos en una desigualdad?

223. Sean $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y $f(x)$ unas funciones monótonas crecientes. Demostrar que, si

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

entonces

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

Determinar la función inversa $x=\varphi(y)$ y su campo de existencia, si

224. $y=2x+3$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$.

225. $y=x^2$; a) $-\infty<x\leqslant 0$; b) $0\leqslant x<+\infty$.

226. $y=\frac{1-x}{1+x}$ $\quad (x\neq -1)$.

227. $y=\sqrt{1-x^2}$; a) $-1\leqslant x\leqslant 0$; b) $0\leqslant x\leqslant 1$.

228. $y=\operatorname{sh} x$, donde $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$.

229. $y=\operatorname{th} x$, donde $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$.

230.

$$y=\begin{cases} x, & \text{si } -\infty<x<1; \\ x^2, & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 4; \\ 2^x, & \text{si } 4<x<+\infty. \end{cases}$$

231. Una función $f(x)$, definida en un intervalo simétrico $(-l, l)$, se llama par, si

$$f(-x)=f(x);$$

e impar, si

$$f(-x)=-f(x).$$

Determinar cuáles de las funciones dadas $f(x)$ son pares y cuáles son impares:

a) $f(x)=3x-x^3$; d) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; e) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

c) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$;

232. Demostrar que toda función $f(x)$, definida en un intervalo simétrico $(-1, 1)$, puede expresarse como la suma de una función par y una función impar.

233. Una función $f(x)$, definida en un conjunto E, se llama periódica, si existe un número $T>0$ (período de la función, en sentido amplio) tal que

$$f(x \pm T)=f(x) \quad \text{para} \quad x \in E.$$

Averiguar cuáles de las funciones dadas son periódicas, y hallar sus períodos mínimos, si:

a) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

b) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

c) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

d) $f(x)=\sin^2 x$;

e) $f(x)=\sin x^2$;

f) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

g) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

h) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

234. Demostrar que la función de Dirichlet

$$\chi(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional,}\end{cases}$$

cualquier número racional es un período.

235. Demostrar que la suma y el producto de dos funciones periódicas, que están definidas en un conjunto común y cuyos períodos son conmensurables, también son funciones periódicas.

235.1. Una función $f(x)$ se llama antiperiódica, si

$$f(x+T)\equiv -f(x) \qquad (T>0).$$

Demostrar que $f(x)$ es periódica, de período $2T$.

236. Demostrar que, si para una función $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ se verifica la igualdad $f(x+T)=kf(x)$, donde k y T son constantes positivas, entonces $f(x)=a^x\varphi(x)$, donde a es una constante y $\varphi(x)$ es una función periódica de período T.

§ 4. Representación gráfica de las funciones

1.° Para la construcción de la gráfica de una función $y=f(x)$ se procede del modo siguiente: 1) se determina el campo de existencia de la función $X=\{x\}$; 2) se toma en X una red suficientemente densa de valores del argumento $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se forma la tabla de los valores correspondientes de la función

$$y_i=f(x_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

3) se marcan los puntos $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ en el plano de coordenadas Oxy y se unen éstos mediante líneas, de modo que su comportamiento concuerde con la posición de los puntos intermedios.

2.° Para obtener una gráfica perfecta de la función, se deben estudiar las propiedades generales de la misma.

En primer lugar, es necesario: 1) una vez resuelta la ecuación $f(x)=0$, hay que hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Ox (los ceros de la función); 2) determinar las regiones de variación del argumento, en las cuales la función sea positiva o negativa; 3) si es posible, averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (en los cuales la función es monótona); 4) estudiar el comportamiento de la función cuando el argumento se aproxima indefinidamente a los puntos de la frontera del campo de existencia de la función.

En este párrafo se supone que el lector conoce las propiedades de las funciones elementales más simples: la función potencial, exponencial, funciones trigonométricas, etc.

Aplicando estas propiedades se puede obtener inmediatamente el diseño de la gráfica para muchas funciones, sin tener que realizar para ello grandes cálculos. A veces se consigue reducir otras gráficas a combinaciones (suma o producto, etc.) de estas gráficas elementales.

Problemas:

237. Construir la gráfica de la función lineal homogénea

$$y=ax$$

para $a=0$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; -1.

238. Construir la gráfica de la función lineal

$$y=x+b$$

para $b=0$, 1, 2, -1.

239. Construir las gráficas de las funciones lineales:

a) $y=2x+3$; b) $y=2-0{,}1x$; c) $y=-\frac{x}{2}-1$.

240. El coeficiente térmico de dilatación lineal del hierro es $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-6}$. Construir en una escala conveniente la gráfica de la función

$$l=f(T) \qquad (-40° \leqslant T \leqslant 100°),$$

donde T es la temperatura en grados y l es la longitud de la varilla de hierro a la temperatura T, si $l = 100$ cm para $T = 0°$.

241. Sobre el eje numérico se mueven dos puntos materiales. En el instante $t = 0$, el primer punto estaba situado a 20 m a la izquierda del origen de coordenadas y llevaba la velocidad $v_1 = 10$ m/s; en el mismo instante $t = 0$, el segundo punto estaba situado a 30 m a la derecha del punto 0 y llevaba la velocidad $v_2 = -20$ m/s. Construir las gráficas de las ecuaciones de los movimientos de estos puntos y hallar el tiempo y el lugar de su encuentro.

242. Construir las gráficas de las funciones racionales enteras de 2° grado (parábolas):

a) $y = ax^2$ para $a = 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ -1$;

b) $y = (x - x_0)^2$ para $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

c) $y = x^2 + c$ para $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

243. Construir la gráfica del trinomio cuadrático

$$y = ax^2 + bc + c,$$

reduciéndolo a la forma

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Examinar los ejemplos:

a) $y = 8x - 2x^2$; c) $y = -x^2 + 2x - 1$;

b) $y = x^2 - 3x + 2$; d) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Un punto material ha sido lanzado bajo el ángulo $\alpha = 45°$ respecto del plano del horizonte y con la velocidad inicial $v_0 = 600$ m/s. Construir la gráfica de la trayectoria del movimiento y calcular la altura máxima y el alcance horizontal (considerar aproximadamente $g \approx 10$ m/s^2; se desprecia la resistencia del aire).

Construir las gráficas de las funciones racionales enteras de grado superior al segundo:

245. $y = x^3 + 1$.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

247. $y = x^2 - x^4$.

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ $(a > 0)$.

Construir las gráficas de las funciones lineales fraccionarias (funciones homográficas; hipérbolas):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. Construir la gráfica de la función homográfica

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0,\ c \neq 0),$$

reduciéndola a la forma

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

Examinar el ejemplo

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}.$$

252. Un gas a la presión $p_0 = 1$ atm. ocupa un volumen $v_0 = 12$ m^3. Construir la gráfica de la variación del volumen v del gas en función de la presión p, si la temperatura del gas permanece constante (ley de Boyle-Mariotte).

Construir las gráficas de las funciones racionales fraccionarias:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (hipérbola).

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (Tridente de Newton).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (curva de Agnesi).

257. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ (serpentina de Newton).

258. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

259. $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

260. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$.

261. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1 - x}$.

262. $y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$.

263. Construir el diseño de la gráfica de la función

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1 x + b_1} \qquad (a_1 \neq 0),$$

reduciéndola a la forma

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}.$$

Examinar el ejemplo

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}.$$

264. Construir la gráfica del valor absoluto de la fuerza de atracción F de un punto material que está situado a la distancia x del centro de atracción, si $F = 10$ kg para $x = 1$ m (ley de Newton).

265. Según la ley de Van der Waals, el volumen v de un gas real y su presión p, a una temperatura constante, están ligados por la relación

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c.$$

Construir la gráfica de la función $p=p(v)$, si $a=2$, $b=0{,}1$ y $c=10$.

Construir las gráficas de las funciones irracionales:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (parábola).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (parábola de Neil).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (elipse).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (hipérbola).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (cisoide).

273. $y=+\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Construir la gráfica de la función potencial

$$y=x^n$$

para: a) $n=1, 3, 5$; b) $n=2, 4, 6$.

275. Construir la gráfica de la función potencial

$$y=x^n$$

para: a) $n=-1, -3$; b) $n=-2, -4$.

276. Construir la gráfica del radical

$$y=\sqrt[m]{x}$$

para: a) $m=2, 4$; b) $m=3, 5$.

277. Construir la gráfica del radical

$$y=\sqrt[m]{x^k},$$

si: a) $m=2$, $k=1$; b) $m=2$, $k=3$; c) $m=3$, $k=1$; d) $m=3$, $k=2$; e) $m=3$, $k=4$; f) $m=4$, $k=2$; g) $m=4$, $k=3$.

278. Construir la gráfica de la función exponencial

$$y=a^x$$

para $a=\frac{1}{2}$, 1, 2, e, 10.

279. Construir la gráfica de la función exponencial compuesta

$$y=e^{y_1},$$

si:

a) $y_1=x^2$; b) $y_1=-x^2$; c) $y_1=\frac{1}{x}$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; e) $y_1=-\frac{1}{x^2}$; f) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

280. Construir la gráfica de la función logarítmica

$$y=\log_a x$$

para $a=\frac{1}{2}$, 2, e, 10.

281. Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=\ln(-x)$; b) $y=-\ln x$.

282. Construir la gráfica de la función logarítmica compuesta

$$y=\ln y_1,$$

si

a) $y_1=1+x^2$; b) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; c) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; e) $y_1=1+e^x$.

283. Construir la gráfica de la función

$$y=\log_x 2.$$

284. Construir la gráfica de la función

$$y=A\sin x$$

para $A=1$, 10, -2.

285. Construir la gráfica de la función

$$y=\sin(x-x_0),$$

si $x_0=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

286. Construir la gráfica de la función

$$y=\sin nx,$$

si $n=1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

287. Construir la gráfica de la función

$$y=a\cos x+b\sin x,$$

reduciéndola a la forma

$$y=A\sin(x-x_0).$$

Examinar el ejemplo: $y=6\cos x+8\operatorname{sen} x$.

Construir las gráficas de las funciones trigonométricas:

288. $y=\cos x$.
289. $y=\operatorname{tg} x$.
290. $y=\operatorname{ctg} x$.
291. $y=\sec x$.
292. $y=\csc x$.
293. $y=\sin^2 x$.
294. $y=\sin^3 x$.
295. $y=\operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.
297. $y=\pm\sqrt{\cos x}$.

Construir las gráficas de las funciones:

298. $y=\sin x^2$.
299. $y=\sin\frac{1}{x}$.
300. $y=\cos\frac{\pi}{x}$.
300.1. $y=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$.
301. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.
301.1. $y=\sec\frac{1}{x}$.
302. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.
303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.
304. $y=\frac{\sin x}{x}$.
305. $y=e^x\cos x$.
306. $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin\pi x}$.
307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$.
308. $y=\ln(\cos x)$.
309. $y=\cos(\ln x)$.
310. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Construir las gráficas de las funciones circulares inversas:

311. $y=\arcsin x$.
312. $y=\arccos x$.
313. $y=\operatorname{arctg} x$.
314. $y=\operatorname{arcctg} x$.
315. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.
316. $y=\arccos\frac{1}{x}$.
317. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.
318. $y=\arcsin(\sin x)$.
319. $y=\arcsin(\cos x)$.
320. $y=\arccos(\cos x)$.
321. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
322. $y=\arcsin(2\sin x)$.

323. Construir la gráfica de la función

$$y=\arcsin y_1,$$

si

a) $y_1=1-\frac{x}{2}$; c) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$;

b) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$; d) $y_1=e^x$.

324. Construir la gráfica de la función

$$y=\operatorname{arctg} y_1,$$

si:

a) $y_1=x^2$; b) $y_1=\frac{1}{x^2}$; c) $y_1=\ln x$; d) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

324.1. Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=x^3-3x+2$;

b) $y=\frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

c) $y=\frac{x^2}{|x|-1}$;

d) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$;

e) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

f) $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x^2}$;

g) $y=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

h) $y=\lg(x^2-3x+2)$;

i) $y=\arcsin\left(\frac{3}{2}-\sin x\right)$;

j) $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$;

k) $y=\log_{\cos x}\sin x$;

l) $y=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. Conociendo la gráfica de la función $y=f(x)$, construir las gráficas de las funciones:

a) $y=-f(x)$; b) $y=f(-x)$; c) $y=-f(-x)$.

326. Conociendo la gráfica de la función $y=f(x)$, construir las gráficas de las funciones:

a) $y=f(x-x_0)$; c) $y=f(2x)$;

b) $y=y_0+f(x-x_0)$; d) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

326.1. Sea

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } |x|\leq 1;\\ 0 & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

Construir las gráficas de las funciones:

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$$

para $t=0$, $t=1$ y $t=2$.

327. Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=2+\sqrt{1-x}$; d) $y=-\arcsin(1+x)$;
b) $y=1-e^{-x}$; e) $y=3+2\cos 3x$.
c) $y=\ln(1+x)$;

328. Conociendo la gráfica de la función $y=f(x)$, construir las gráficas de las funciones:

a) $y=|f(x)|$; b) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$; c) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$.

329. Conociendo la gráfica de la función $y=f(x)$, construir las gráficas de las funciones:

a) $y=f^2(x)$; d) $y=f(f(x))$;
b) $y=\sqrt{f(x)}$; e) $y=\operatorname{sgn} f(x)$;
c) $y=\ln f(x)$; f) $y=[f(x)]$.

329.1. Sea

$$f(x)=(x-a)(b-x) \quad (a<b).$$

Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=f(x)$; e) $y=e^{f(x)}$;
b) $y=f^2(x)$; f) $y=\lg f(x)$;
c) $y=\frac{1}{f(x)}$; g) $y=\operatorname{arcctg} f(x)$.
d) $y=\sqrt{f(x)}$;

329.2. Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=\arcsin[\sin f(x)]$; d) $y=\arccos[\cos f(x)]$;
b) $y=\arcsin[\cos f(x)]$; e) $y=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$,
c) $y=\arccos[\sin f(x)]$;

если: 1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=x^3$.

330. Conociendo las gráficas de las funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$, construir las gráficas de las funciones:

a) $y=f(x)+g(x)$; b) $y=f(x)g(x)$; c) $y=f(g(x))$.

Aplicando la regla de la suma de las gráficas, construir las gráficas de las siguientes funciones:

331. $y=1+x+e^x$.
332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$.
333. $y=x+\sin x$.
334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.
335. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$.
336. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$.
337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.
338. $y=|1-x|+|1+x|$.
339. $y=|1-x|-|1+x|$.

340. Construir las gráficas de las funciones hiperbólicas:

a) $y=\operatorname{ch} x$, donde $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

b) $y=\operatorname{sh} x$, donde $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

c) $y=\operatorname{th} x$, donde $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Aplicando la regla del producto de las gráficas, construir las gráficas de las funciones:

341. $y=x\sin x$.
342. $y=x\cos x$.
343. $y=x^2\sin^2 x$.
344. $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.
345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$.
346. $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.
347. $y=[x]\,|\sin \pi x|$.
348. $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Sea

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{si } |x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

Construir la gráfica de la función

$$y=f(x)f(a-x),$$

si:

a) $a=0$; b) $a=1$; c) $a=2$.

350. Construir la gráfica de la función

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Construir las gráficas de las funciones

$$y=\frac{1}{f(x)},$$

si:

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$.
352. $f(x)=x(1-x)^2$.
353. $f(x)=\sin^2 x$.
354. $f(x)=\ln x$.
355. $f(x)=e^x\sin x$.

356. Construir la gráfica de la función compuesta

$$y=f(u),$$

donde $u=2\sin x$ si:

$$f(u)=\begin{cases}-1 & \text{para } -\infty<u<-1;\\ u & \text{para } -1\leqslant u\leqslant 1;\\ 1 & \text{para } 1<u<+\infty.\end{cases}$$

357. Sea

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) \text{ y } \psi(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x<0;\\ x^2, & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=\varphi[\varphi(x)]$; c) $y=\psi[\varphi(x)]$;
b) $y=\varphi[\psi(x)]$; d) $y=\psi[\psi(x)]$.

358. Sea

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } |x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } |x|>1,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 2-x^2, & \text{si } |x|\leqslant 2;\\ 2, & \text{si } |x|>2.\end{cases}$$

Construir las gráficas de las funciones:

a) $y=\varphi[\varphi(x)]$; c) $y=\psi[\varphi(x)]$;
b) $y=\varphi[\psi(x)]$; d) $y=\psi[\psi(x)]$.

359. Prolongar a la región negativa $x<0$, la función $f(x)$ definida en la región positiva $x>0$, de modo que la función que se obtenga sea: 1) par; 2) impar, si:

a) $f(x)=1-x$; d) $f(x)=\sin x$;
b) $f(x)=2x-x^2$; e) $f(x)=e^x$;
c) $f(x)=\sqrt{x}$; f) $f(x)=\ln x$.

Construir las gráficas correspondientes de las funciones.

360. Averiguar, respecto de qué ejes verticales son simétricas las gráficas de las funciones:

a) $y=ax^2+bx+c$; c) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$ $(0<a<b)$;
b) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$; d) $y=a+b\cos x$.

361. Averiguar, respecto de qué centros son simétricas las gráficas de las funciones:

a) $y=ax+b$; d) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$;
b) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; e) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.
c) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

362. Construir las gráficas de las funciones periódicas:

a) $|y|=|\sin x|$; b) $y=\operatorname{sgn}\cos x$;
c) $|y|=f(x)$,
donde $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$, si $0\leqslant x\leqslant 2l$ y $f(x+2l)\equiv f(x)$;
d) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$;
e) $y=(x)$, donde (x) es la distancia del número x hasta el número entero más próximo a él.

363. Demostrar que, si la gráfica de una función $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ es simétrica respecto de dos ejes verticales $x=a$ y $x=b$ $(b>a)$, entonces la función $f(x)$ es periódica.

364. Demostrar que, si la gráfica de una función $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ es simétrica respecto de dos puntos $A(a, y_0)$ y $B(b, y_1)$ $(b>a)$, entonces la función $f(x)$ es la suma de una función lineal y una función periódica. En particular, si $y_0=y_1$, la función $f(x)$ es periódica.

365. Demostrar que, si la gráfica de una función $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ es simétrica respecto del punto $A(a, y_0)$ y de la recta $x=b$ $(b\neq a)$, la función $f(x)$ es periódica.

366. Construir la gráfica de la función $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ si $f(x+1)=2f(x)$ y $f(x)=x(1-x)$ para $0\leqslant x\leqslant 1$.

367. Construir la gráfica de la función

$$y=f(x) \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

si

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x \quad \text{y} \quad f(x)=0, \text{ para } 0\leqslant x\leqslant \pi.$$

368. Construir la gráfica de la función $y=y(x)$, si:

a) $x=y-y^3$; c) $x=y-\ln y$;
b) $x=\frac{1-y}{1+y^2}$; d) $x^2=\sin y$.

369. Construir las gráficas de las funciones $y=y(x)$, dadas en forma paramétrica, si:

a) $x=1-t$, $y=1-t^2$;
b) $x=t+\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t^2}$;
c) $x=10\cos t$, $y=\sin t$ (elipse);
d) $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ (hipérbola);
e) $x=5\cos^2 t$, $y=3\sin^2 t$;
f) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (cicloide);
g) $x=\sqrt[t+1]{t}$, $y=\sqrt[t]{t+1}$, $(t>0)$.

370. Construir las gráficas de las funciones implícitas:

a) $x^2-xy+y^2=1$ (elipse); e) $\sin x=\sin y$;

b) $x^3+y^3-3xy=0$ (hoja de Descartes); f) $\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$;

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (parábola); g) $x^y=y^x$ $(x>0,\ y>0)$;

d) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ (astroide); h) $x-|x|=y-|y|$.

370.1. Construir las gráficas de las funciones implícitas:

a) $\min(x, y)=1$; c) $\max(|x|, |y|)=1$;

b) $\max(x, y)=1$; d) $\min(x^2, y)=1$.

371. Construir las gráficas de las funciones $r=r(\varphi)$ en un sistema polar de coordenadas (r, φ), si:

a) $r=\varphi$ (espiral de Arquímedes);

b) $r=\frac{\pi}{\varphi}$ (espiral hiperbólica);

c) $r=\frac{\varphi}{\varphi+1}$ $(0\leqslant\varphi<+\infty)$;

d) $r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (espiral logarítmica);

e) $r=2(1+\cos\varphi)$ (cardioide);

f) $r=10\sin 3\varphi$ (rosa de tres pétalos);

g) $r^2=36\cos 2\varphi$ (lemniscata de Bernoulli);

h) $\varphi=\frac{r}{r-1}$ $(r>1)$;

i) $\varphi=2\pi\sin r$.

371.1. Construir en coordenadas polares r y φ las gráficas de las siguientes funciones:

a) $\varphi=4r-r^2$; c) $r^2+\varphi^2=100$.

b) $\varphi=\frac{12r}{1+r^2}$;

371.1. Construir en coordenadas polares r y φ las gráficas de las funciones dadas en forma paramétrica ($t\geqslant 0$ es el parámetro)

a) $\left.\begin{array}{l}\varphi=t\cos^2 t,\\ r=t\sin^2 t,\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}\varphi=1-2^{-t}\sin\frac{\pi t}{2},\\ r=1-2^{-t}\cos\frac{\pi t}{2}.\end{array}\right\}$

372. Resolver aproximadamente la ecuación

$$x^3-3x+1=0,$$

construyendo para ello la gráfica de la función $y=x^3-3x+1$.

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

373. $x^3-4x-1=0$. 376. $\lg x=0{,}1x$.

374. $x^4-4x+1=0$. 377. $10^x=x^2$.

375. $x=2^{-x}$. 378. $\operatorname{tg} x=x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

Resolver gráficamente los sistemas de ecuaciones:

379. $x+y^2=1$, $16x^2+y=4$.

380. $x^2+y^2=100$, $y=10(x^2-x-2)$.

§ 5. Límite de una función

1.° *Funciones acotadas.* Una función $f(x)$ se llama acotada en un intervalo dado (a, b), si existen unos números m y M tales que

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

para $x\in(a, b)$.

El número $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ se llama ínfimo de la función $f(x)$, y el número $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ supremo de la función en el intervalo considerado (a, b). La diferencia M_0-m_0 se llama oscilación de la función en el intervalo (a, b).

2.° *Límite de una función en un punto.* Supongamos que la función $f(x)$ está definida en un conjunto $X=\{x\}$ que tiene un punto de acumulación a. La expresión

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \qquad (1)$$

denota que, para cualquier número $\varepsilon>0$, existe un número $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que, para todos los valores de x, para los cuales $f(x)$ tiene sentido y cumplen la condición $0<|x-a|<\delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Para la existencia del límite (1) de la función, es necesario y suficiente que para cada sucesión $x_n\longrightarrow a$, $x_n\neq a$ $(n=1, 2, \ldots)$ se cumpla la igualdad $(x_n\in X)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

Subsisten los dos límites notables:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Criterio de Cauchy. El límite de la función $f(x)$ en el punto a existe

cuando, y sólo cuando, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

si $0 < |x' - a| < \delta$ y $0 < |x'' - a| < \delta$, donde x' y x'' son dos puntos cualesquiera del campo de definición de la función $f(x)$.

3.° *Límites laterales.* El número A' se llama límite a la izquierda de la función en el punto a:

$$A' = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0),$$

si

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ para } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Análogamente, el número A'' se llama límite a la derecha de la función $f(x)$ en el punto a:

$$A'' = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$

si

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ para } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

Para la existencia del límite de la función $f(x)$ en el punto a, es necesario y suficiente que

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4.° *Límite infinito.* La expresión simbólica

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

denota que para cualquier $E > 0$ se verifica la desigualdad

$$|f(x)| > E, \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta(E).$$

5.° *Límite parcial.* Si para alguna sucesión $x_n \longrightarrow a$ $(x_n \neq a)$ se verifica la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B,$$

el número B (o el símbolo ∞) se llama límite parcial (finito o infinito, respectivamente) de la función $f(x)$ en el punto a.

Los límites parciales mínimo y máximo se denotan mediante

$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$$

y se llaman límite inferior y límite superior, respectivamente, de la función $f(x)$ en el punto a.

La igualdad

$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) = \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$$

es condición necesaria y suficiente para la existencia del límite (finito o infinito, respectivamente) de la función $f(x)$ en el punto a.

Problemas:

381. Comprobar que la función, definida por las condiciones:

$$f(x) = n, \quad \text{si} \quad x = \frac{m}{n},$$

donde m y n son números enteros, primos entre sí, y $n > 0$, y

$$f(x) = 0, \text{ si } x \text{ es irracional},$$

es finita, pero no está acotada en cada punto x (es decir, no está acotada en cualquier entorno de este punto).

382. Una función $f(x)$, definida y localmente acotada en cada punto: a) de un intervalo, b) de un segmento, ¿estará acotada en el intervalo dado o en el segmento dado, respectivamente?

383. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

está acotada en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

384. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

no está acotada en todo entorno del punto $x = 0$, sin embargo, no es infinitamente grande cuando $x \longrightarrow 0$.

385. Averiguar si la función

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

está acotada o no en el intervalo $0 < x < \varepsilon$.

386. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}$$

tiene en la región $0 \leqslant x < +\infty$ el ínfimo $m = 0$ y el supremo $M = 1$.

387. Una función $f(x)$ está definida y es monótona creciente en el segmento $[a, b]$. ¿A qué son iguales el ínfimo y el supremo de dicha función en este segmento?

Determinar el ínfimo y el supremo para las funciones:

388. $f(x) = x^2$ en $[-2, 5)$.

389. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ en $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ en $(0, +\infty)$.

391. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ en $(0, +\infty)$.

392. $f(x)=\sin x$ en $(0, +\infty)$.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ en $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ en $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: a) en $(0, 2)$ y b) en $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ en $[0, 1]$.

397. Calcular la oscilación de la función

$$f(x)=x^2$$

en los intervalos: a) (1; 3); b) (1,9; 2,1); c) (1,99; 2,01); d) (1,999; 2,001).

398. Calcular la oscilación de la función

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

en los intervalos: a) (– 1; 1); b) (– 0,1; 0,1); c) (– 0,01; 0,01); d) (– 0,001; 0,001).

399. Sean $m[f]$ y $M[f]$ el ínfimo y el supremo, respectivamente, de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b).

Demostrar que, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones definidas en (a, b), entonces

$$m[f_1+f_2]\geqslant m[f_1]+m[f_2]$$

y

$$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

Construir ejemplos de funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, para las cuales en las últimas relaciones se verifica: a) la igualdad y b) la desigualdad.

400. Sea $f(x)$ una función definida en la región $[a, +\infty)$ y acotada en cada segmento $[a, b]$.

Hagamos:

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

y

$$M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi).$$

Construir las gráficas de las funciones $y=m(x)$ e $y=M(x)$ si:

a) $f(x)=\sin x$ y b) $f(x)=\cos x$.

401. Mediante un razonamiento «$\varepsilon-\delta$», demostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

Rellenar la tabla siguiente:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. Empleando el vocabulario «$E-\delta$», demostrar que

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$$

Rellenar la tabla siguiente:

E	10	100	1000	10 000	...
δ					

403. Formular, mediante desigualdades, las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; b) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$; c) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Dar ejemplos correspondientes.

Formular, mediante desigualdades, las siguientes afirmaciones y dar ejemplos correspondientes:

404. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

405. a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; f) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; g) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$; h) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; i) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

406. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

407. Sea $y=f(x)$. Formular mediante desigualdades el significado de las expresiones siguientes:

a) $y\to b-0$ cuando $x\to a$;
b) $y\to b-0$ cuando $x\to a-0$;
c) $y\to b-0$ cuando $x\to a+0$;
d) $y\to b+0$ cuando $x\to a$;
e) $y\to b+0$ cuando $x\to a-0$;
f) $y\to b+0$ cuando $x\to a+0$;
g) $y\to b-0$ cuando $x\to\infty$;
h) $y\to b-0$ cuando $x\to-\infty$;
i) $y\to b-0$ cuando $x\to+\infty$;
j) $y\to b+0$ cuando $x\to\infty$;
k) $y\to b+0$ cuando $x\to-\infty$;
l) $y\to b+0$ cuando $x\to+\infty$.

Dar ejemplos correspondientes.

408. Sea

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

donde a_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ son números reales.

Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty.$$

409. Sea

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m},$$

donde $a_0\neq 0$ y $b_0\neq 0$.

Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{si} \quad n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{si} \quad n=m;\\ 0, & \text{si} \quad n<m.\end{cases}$$

410. Sea

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x, y

$$P(a)=Q(a)=0.$$

¿Qué valores puede tener la expresión

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}?$$

Hallar los valores de las siguientes expresiones:

411. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m y n son números naturales).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

421. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

423. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m y n son números naturales).

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n es un número natural).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n es un número natural).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m y n son números naturales).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

Indicación. Véase el ejercicio 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

Indicación. Véase el ejercicio 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+4^2+7^2+\ldots+(3n-2)^2}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Calcular el área del triángulo mixtilíneo OAM (fig. 3), limitado por la parábola $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, el eje Ox y la recta $x=a$, considerándola

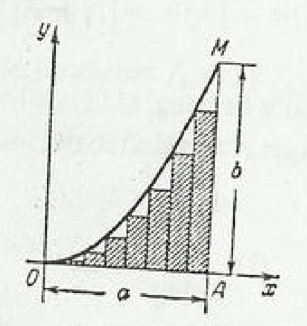


Fig. 3

como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos de base $\dfrac{a}{n}$, donde $n\longrightarrow\infty$.

Calcular los límites:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$. $(a>0)$

440. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

443. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n es un número entero).

445. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m y n son números enteros).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m y n son números enteros).

454. Sea $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ y sea m un número entero.

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Calcular los límites:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m y n son números enteros).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x]$.

458. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$.

460. $\lim\limits_{x \to +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

462. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$.

463. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

464. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

465. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\ldots(x+a_n)} - x]$.

466. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ (n es un número natural).

467. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ (n es un número natural).

468. Estudiar el comportamiento de las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, si el coeficiente a tiende a cero, mientras que los coeficientes b y c son constantes, siendo $b \neq 0$.

469. Hallar las constantes a y b de la condición

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0.$$

470. Hallar las constantes a_i y b_i ($i = 1, 2$) de las condiciones:

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1 x - b_1) = 0$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_2 x - b_2) = 0.$$

Calcular los límites:

471. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

472. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

(m y n son números enteros)

474. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

474.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 3x$.

475. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

478. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$.

479. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

480. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

481. Demostrar las igualdades:

a) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$; b) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$;

c) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ $\left(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Calcular los límites:

482. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

483. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$.

485. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sec x - \sec a}{x-a}$.

487. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

494. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

495. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

496. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

503. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

504. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

506. a) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

507. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

508. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim_{n\to\infty}\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

511. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

512. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

514. $\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

516. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

518. $\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

519.1. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

520. $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

521. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x}$.

523. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

524. $\lim_{x\to0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$.

525. $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

526. $\lim_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$.

528. $\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

530. $\lim_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim_{x\to\infty}\left(\lg\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

537. $\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

539. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim_{x\to0}\left(\ln\frac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

542. $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

544. $\lim_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

545. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

545.1. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

545.3. $\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot2^x)]}$.

546. $\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

547. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

549. $\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad(a>1,\ n>0).$$

565. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\quad(a>1,\ \varepsilon>0).$$

Calcular los límites:

566. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

568. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

574. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

576. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}$ (véase el ejercicio 340).

576.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$ (véase el ejercicio 340).

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$.

577.1. a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$.

577.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$.

578. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

592. $\lim_{x\to+0} x\ln x$.

593. a) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. a) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594.1. Calcular

$$h=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to-\infty}f(x),$$

si

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. a) $\lim_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$; b) $\lim_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$.

596. a) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

597. a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Demostrar que

a) $\frac{2x}{1+x}\to 2+0$ cuando $x\to-\infty$;

b) $\frac{2x}{1+x}\to 2-0$ cuando $x\to+\infty$.

599. Demostrar que

a) $2^x\to 1-0$ cuando $x\to-0$;

b) $2^x\to 1+0$ cuando $x\to+0$.

600. Calcular $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, si $f(x)=x+[x^2]$.

601. Calcular $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n=0, \pm1, \ldots)$, si $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$.

Calcular:

602. $\lim_{x\to0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

603. $\lim_{x\to0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

604. $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

605. $\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

606. $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n\text{ veces}}$.

607. Si $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$ y $\lim_{x\to A}\psi(x)=B$, ¿se deduce de aquí que

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

Examinar el ejemplo: $\varphi(x)=\frac{1}{q}$ si $x=\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros, primos entre sí, y $\varphi(x)=0$ si x es irracional; $\psi(x)=1$ si $x\neq0$ y $\psi(x)=0$ si $x=0$ y $x\to0$.

608. Demostrar los teoremas de Cauchy: si una función $f(x)$ está definida en el intervalo $(a,+\infty)$ y está acotada en todo intervalo finito (a,b), entonces

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant C>0)$.

suponiendo que existen los límites de los segundos miembros de las igualdades.

609. Demostrar que, si: a) la función $f(x)$ está definida en la región $x>a$; b) está acotada en toda región finita $a<x<b$; c) $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty.$$

610. Demostrar que, si: 1) la función $f(x)$ está definida en la región $x>a$; 2) está acotada en toda región finita $a<x<b$; 3) para un número natural n existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

611. Demostrar que

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

612. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=2\pi.$$

Indicación. Utilizar la fórmula (*) del ejercicio 72.

Construir las gráficas de las funciones:

613. a) $y=1-x^{100}$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

614. a) $y=\frac{x^{100}}{1+x^{100}}(x\geqslant 0)$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}(x\geqslant 0)$.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\quad(x\neq 0)$.

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$.

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad(x\geqslant 0)$.

620. a) $y=\sin^{1000}x$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}\quad(x\geqslant 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$. **624.** $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$. **625.** $y=\lim\limits_{t\to x}\frac{1}{t-x}\ln\frac{t}{x}\ (x>0)$.

625.1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x\,\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}\quad(x\geqslant 0)$.

625.2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin^2(n!\,\pi x)|$.

625.3. Construir la curva

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

626. Se llama asíntota (oblicua) de una curva $y=f(x)$ la recta $y=kx+b$, para la cual,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Utilizando esta relación, deducir las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de asíntotas.

627. Hallar las asíntotas y construir las siguientes curvas:

a) $y=\frac{x^3}{x^2+x-2}$; d) $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$;

a) $y=\sqrt{x^2+x}$; e) $y=\ln(1+e^x)$;

c) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; f) $y=x+\arccos\frac{1}{x}$.

Calcular los límites que siguen:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, si $|x|<1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Sea

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

donde $\psi(x)>0$ y $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1, 2, \ldots)$ cuando $n\to\infty$, es decir, $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ para $m=1, 2, \ldots$ y $n>N(\varepsilon)$.

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})],\qquad(1)$$

suponiendo que existe el límite del segundo miembro de la igualdad (1).

Aplicando el teorema anterior, calcular

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$. **634.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)\quad(a>0)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$. **635.** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. La sucesión x_n viene dada por las igualdades:

$$x_1=\sqrt{a},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ldots \quad (a>0).$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

637.1. La sucesión x_n viene dada del modo siguiente:

$$x_1=0,\quad x_2=1,$$
$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2}) \qquad (n=2,\ 3,\ldots).$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

637.2. La sucesión y_n se define mediante la sucesión x_n por las relaciones:

$$y_0=x_0,\quad y_n=x_n-\alpha x_{n-1} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

donde $|\alpha|<1$. Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$, si $\lim_{n\to\infty} y_n=b$.

637.3. La sucesión x_n se define del modo siguiente:

$$x_0=1,\quad x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Indicación. Examinar la diferencia entre x_n y las raíces de la ecuación $x=\frac{1}{1+x}$.

638. La sucesión de funciones

$$y_n=y_n(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

se define del modo siguiente:

$$y_1=\frac{x}{2},\qquad y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n=2,\ 3,\ldots).$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} y_n$.

639. La sucesión de funciones $y_n=y_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ se define del modo siguiente:

$$y_1=\frac{x}{2},\ y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} y_n$.

639.1. Sea $x>0$ e $y_n=y_{n-1}(2-xy_{n-1})$ $(n=1, 2, \ldots)$. Demostrar que, si $y_i>0$ $(i=0,\ 1)$, la sucesión y_n es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{1}{x}.$$

Indicación. Estudiar la diferencia

$$\frac{1}{x}-y_n.$$

639.2. Para calcular $y=\sqrt{x}$, donde $x>0$, se aplica el siguiente proceso: $y_0>0$ es arbitrario,

$$y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\sqrt{x}.$$

Indicación. Aplicar la fórmula

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2 \qquad (n\geqslant 1).$$

640. Para la resolución aproximada de la ecuación de Kepler

$$x-\varepsilon\sin x=m \qquad (0<\varepsilon<1) \qquad (1)$$

se hace

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0\ \ldots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \ldots$$

(método de aproximaciones sucesivas).

Demostrar que existe $\xi=\lim_{n\to\infty} x_n$ y que ξ es la única raíz de la ecuación (1).

641. Si $\omega_h\,|f|$ es la oscilación de la función $f(x)$ en el segmento $|x-\xi|\leqslant h$ $(h>0)$, el número

$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

se llama oscilación de la función $f(x)$ en el punto ξ.

Determinar la oscilación de la función $f(x)$ en el punto $x=0$, si:

a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

c) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;

d) $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

e) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$;

f) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

g) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

642. Sea $f(x)=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

Demostrar que, cualquiera que sea el número α que satisfaga la condición $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$, se puede elegir una sucesión $x_n\longrightarrow 0$ ($n=1$, 2, ...) tal, que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha.$$

643. Calcular

$$l=\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \quad \text{y} \quad L=\overline{\lim}_{x\to 0} f(x),$$

si:

a) $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=(2-x^2)\cos\frac{1}{x}$; c) $f(x)=\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$

644. Calcular

$$l=\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) \quad \text{y} \quad L=\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x),$$

si

a) $f(x)=\sin x$;

b) $f(x)=x^2\cos^2 x$;

c) $f(x)=2^{\sin x^2}$;

d) $f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ $(x\geqslant 0)$.

§ 6. Orden infinitesimal y orden de crecimiento de una función

O-simbolismo

1.° La expresión

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \text{ para } x\in X$$

denota que existe una constante A, tal que

$$|\varphi(x)|\leqslant A|\psi(x)| \text{ para } x\in X. \quad (1)$$

Análogamente, se escribe

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \text{ para } x\to a, \quad (2)$$

si la desigualdad (1) se verifica en un entorno U_a del punto a $(x\neq a)$. En particular, si $\psi(x)\neq 0$ para $x\in U_a$, $(x\neq a)$, se verifica la relación (2) si existe y es finito el límite $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\neq 0$. En este caso escribiremos: $\varphi(x)=0^*(\psi(x))$.

Si

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^p}=k\neq 0 \quad (p>0),$$

se dice que $\varphi(x)$ es un infinitésimo de orden p respecto del infinitésimo x. De un modo similar, si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p}=k\neq 0 \quad (p>0),$$

se dice que $\psi(x)$ es un infinito de orden p respecto del infinito x.

2.° La expresión

$$\varphi(x)=o(\psi(x)) \quad \text{cuando } x\to a$$

denota que

$$\varphi(x)=\alpha(x)\psi(x) \quad (x\in U_a,\ x\neq a), \quad (3)$$

donde $\alpha(x)\longrightarrow 0$ cuando $x\longrightarrow a$. Si $\psi(x)\neq 0$ para $x\in U_a$, $x\neq a$, la igualdad (3) equivale a afirmar que

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3.° Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se llaman equivalentes ($\varphi(x)\sim\psi(x)$) cuando $x\longrightarrow a$, si

$$\varphi(x)-\psi(x)=o(\psi(x)) \text{ cuando } x\to a. \quad (4)$$

Si $\psi(x)\neq 0$ para $x\in U_a$, $x\neq a$, entonces, de (4) se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1.$$

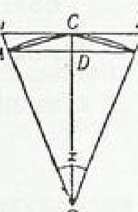
Cuando $x\longrightarrow 0$ se verifican las siguientes relaciones de equivalencia:

$\sin x\sim x$; $\operatorname{tg} x\sim x$; $a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0)$; $\ln(1+x)\sim x$; $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

En general,

$$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x).$$

Al calcular el límite de la razón de dos funciones infinitésimas (o infinitas) cuando $x\longrightarrow a$, las funciones dadas se pueden sustituir por sus equivalentes.



Problemas:

645. Considerando que el ángulo central $AOB=x$ (fig. 4) es un infinitésimo de 1.er orden, determinar el orden infinitesimal de las siguientes magnitudes: a) de la cuerda AB; b) de la sagita CD; c) del área del sector AOB; d) del área del triángulo ABC; e) del área del trapecio ABB_1A_1; f) del área del segmento ABC.

646. Sea $o(f(x))$ una función arbitraria que tenga un orden de crecimiento menor que la función $f(x)$ cuando $x\longrightarrow a$, y sea $O(f(x))$ una función cualquiera que tenga el mismo orden de crecimiento que la función $f(x)$ cuando $x\longrightarrow a$, donde $f(x)>0$.

Comprobar que

a) $o(o(f(x)))=o(f(x))$;

b) $O(o(f(x)))=o(f(x))$;

c) $o(O(f(x)))=o(f(x))$;

d) $O(O(f(x)))=O(f(x))$;

e) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$.

647. Supongamos que $x\longrightarrow 0$ y que $n>0$. Comprobar que

a) $CO(x^n)=O(x^n)$ ($C\neq 0$ — es una constante);

b) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n<m)$;

c) $O(x^n)\,O(x^m)=O(x^{n+m})$.

648. Supongamos que $x \longrightarrow +\infty$ y que $n>0$. Comprobar que

a) $CO(x^n)=O(x^n)$;
b) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n>m)$;
c) $O(x^n)\,O(x^m)=O(x^{n+m})$.

649. Demostrar que el símbolo $\sim$ posee las propiedades: 1) reflexiva: $\varphi(x)\sim\varphi(x)$; 2) simetría: si $\varphi(x)\sim\psi(x)$, entonces $\psi(x)\sim\varphi(x)$; 3) transitiva: si $\varphi(x)\sim\psi(x)$ y $\psi(x)\sim\chi(x)$, entonces $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

650. Supongamos que $x\longrightarrow 0$. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $2x-x^2=O(x)$;
b) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})$;
c) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$;
d) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon>0)$;
e) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$;
f) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$;
g) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

651. Supongamos que $x\longrightarrow+\infty$. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $2x^3-3x^2+1=O(x^3)$;
b) $\frac{x+1}{x^2+1}=O\left(\frac{1}{x}\right)$;
c) $x+x^2\sin x=O(x^2)$;
d) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$;
e) $\ln x=o(x^{\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$;
f) $x^pe^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;
g) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$;
h) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

652. Demostrar que para x suficientemente grande se verifican las desigualdades:

a) $x^2+10x+100<0{,}001\,x^3$;
b) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$;
c) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

652.1. Demostrar la fórmula asintótica

$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

cuando $x\longrightarrow+\infty$.

653. Supongamos que $x\longrightarrow 0$. Hallar el término principal de la forma Cx^n (C es una constante) y determinar el orden infinitesimal respecto de la variable x para las funciones siguientes:

a) $2x-3x^3+x^5$;
b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;
c) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$;
d) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

654. Supongamos que $x\longrightarrow 0$. Comprobar que las funciones infinitésimas

a) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; b) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$,

son incomparables con la función x^n $(n>0)$, cualquiera que sea n, es decir, nunca se verifica la igualdad $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=k$, donde k es una constante, distinta de cero, y n es arbitrario.

655. Supongamos que $x\longrightarrow 1$. Hallar el término principal de la forma $C(x-1)^n$ y determinar el orden infinitesimal respecto de la función infinitésima $x-1$ para las funciones siguientes:

a) x^3-3x+2;
b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;
c) $\ln x$;
d) e^x-e;
e) x^x-1.

656. Supongamos que $x\longrightarrow+\infty$. Hallar el término principal de la forma Cx^n y determinar el orden de crecimiento respecto de la función infinita x para las funciones siguientes:

a) $x^2+100x+10\,000$;
b) $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$;
c) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$;
d) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Supongamos que $x\longrightarrow+\infty$. Hallar el término principal de la forma $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ y determinar el orden infinitesimal respecto de la función infinitésima $\frac{1}{x}$ para las funciones siguientes:

a) $\frac{x+1}{x^4+1}$;
b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;
c) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$;
d) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

658. Supongamos que $x\longrightarrow 1$. Hallar el término principal de la forma $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ y determinar el orden de crecimiento respecto de la función infinita $\frac{1}{x-1}$ para las funciones siguientes:

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$;
b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
c) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;
d) $\frac{1}{\sin\pi x}$;
e) $\frac{\ln x}{(1-x)^3}$.

659. Supongamos que $x\longrightarrow+\infty$ y que $f_n(x)=x^n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$. Demostrar que: 1) cada una de las funciones $f_n(x)$ crece más rápidamente que la precedente $f_{n-1}(x)$; 2) la función e^x crece más rápidamente que cada una de las funciones $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$.

660. Supongamos que $x \longrightarrow +\infty$ y que

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Demostrar que: 1) cada una de las funciones $f_n(x)$ crece más lentamente que la precedente $f_{n-1}(x)$; 2) la función $f(x) = ln\, x$ crece más lentamente que cada una de las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

661. Demostrar que, cualquiera que sea la sucesión de funciones

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \qquad (x_0 < x < +\infty),$$

siempre se puede construir una función $f(x)$ que crezca más rápidamente que cada una de las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cuando $x \longrightarrow \infty$

§ 7. Continuidad de una función

1.° *Continuidad de una función.* Una función $f(x)$ se llama continua para $x = x_0$ (o en el punto x_0), si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

es decir, si la función $f(x)$ está definida en $x = x_0$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que, siendo $|x - x_0| < \delta$, para todos los valores $f(x)$ que tienen sentido se verifica la desigualdad

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Una función $f(x)$ se llama continua en un conjunto dado $X = \{x\}$ (en un intervalo, en un segmento, etc.), si esta función es continua en cada punto del conjunto X.

Si, para cierto valor $x = x_0$, perteneciente al campo de definición $X = \{x\}$ de la función $f(x)$ o que sea un punto de acumulación de este conjunto, no se cumple la igualdad (1) (es decir, o bien (a) no existe el número $f(x_0)$, o sea, la función no está definida en el punto $x = x_0$, o bien (b) no existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, o bien (c) ambos miembros de la igualdad (1) tienen sentido, pero no se verifica la igualdad), entonces x_0 se llama punto de discontinuidad de la función $f(x)$.

Se distinguen: 1) puntos x_0 de discontinuidad de primera especie, para los cuales existen límites laterales finitos:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \ \text{ y } \ f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

y 2) puntos de discontinuidad de segunda especie, que son todos los demás. La diferencia

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se llama salto de la función en el punto x_0.

Si se cumple la igualdad

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

el punto de discontinuidad x_0 se llama evitable. Si al menos uno de los límites laterales $f(x_0 - 0)$ o $f(x_0 + 0)$ es igual a ∞, entonces x_0 se llama punto de discontinuidad infinita.

Si se verifica la igualdad

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \ \text{(o bien } f(x_0 + 0) = f(x_0)\text{)},$$

se dice que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 a la izquierda (a la derecha). Para la continuidad de la función $f(x)$ en el punto x_0 es necesario y suficiente la igualdad de los tres números:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2.° *Continuidad de las funciones elementales.* Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $x = x_0$, las funciones

$$\text{a) } f(x) \pm g(x); \quad \text{b) } f(x)\, g(x); \quad \text{c) } \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x_0) \neq 0)$$

también son continuas para $x = x_0$.

En particular: a) la función racional entera

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

es continua para cualquier x; b) la función racional fraccionaria

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

es continua para todos los valores x que no anulan al denominador.

En general, las funciones elementales principales: x^n, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ..., son continuas en todos sus puntos de definición.

Un resultado más general es el siguiente: si la función $f(x)$ es continua para $x = x_0$ y la función $g(y)$ es continua para $y = f(x_0)$, la función $g(f(x))$ es continua para $x = x_0$.

3.° *Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas.* Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces: 1) $f(x)$ está acotada en este segmento; 2) alcanza en el mismo el ínfimo m y el supremo M (teorema de Weierstrass); 3) toma en cada intervalo $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ todos los valores intermedios entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ (teorema de Cauchy). En particular, si $f(\alpha) f(\beta) < 0$, existe un valor γ $(\alpha < \gamma < \beta)$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Problemas:

662. Se da la gráfica de una función continua $y=f(x)$. Para un punto fijado a y un número $\varepsilon > 0$, indicar geométricamente un número $\delta > 0$ tal que sea $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ para $|x-a|<\delta$.

663. Se necesita hacer una placa metálica cuadrada de lado $x_0 = 10$ cm. ¿Entre qué límites se puede alterar el lado x de esta placa, si su área $y=x^2$ puede diferenciarse de la proyectada $y_0 = 100$ cm² no más de: a) ± 1 cm²; b) $\pm 0{,}1$ cm²; c) $\pm 0{,}01$ cm²; d) $\pm \varepsilon$ cm²?

664. El arista de un cubo está comprendida entre 2 m y 3 m. ¿Con qué error absoluto Δ está permitido medir el área x de este cubo para que pueda calcularse su volumen y con un error absoluto no superior a ε m³, si: a) $\varepsilon = 0{,}1$ m³; b) $\varepsilon = 0{,}01$ m³; c) $\varepsilon = 0{,}001$ m³?

665. ¿En qué entorno máximo del punto $x_0 = 100$ la ordenada de la gráfica de la función $y=\sqrt{x}$ se diferencia de la ordenada $y_0 = 10$ en una cantidad menor que $\varepsilon = 10^{-n}$ $(n \geqslant 0)$? Calcular la amplitud de este entorno para $n = 0, 1, 2, 3$.

666. Mediante razonamientos «$\varepsilon - \delta$», demostrar que la función $f(x)=x^2$ es continua para $x=5$.

Rellenar la siguiente tabla:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Sea $f(x)=\frac{1}{x}$ y $\varepsilon = 0{,}001$. Para los valores $x_0 = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$; ..., hallar los números positivos más grandes $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, tales que de la desigualdad $|x-x_0|<\delta$ se deduzca la desigualdad $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

¿Es posible, para el número dado $\varepsilon = 0{,}001$, elegir un $\delta > 0$ que sirva para todos los valores x_0 del intervalo $(0, 1)$, es decir, tal que, si $|x-x_0|<\delta$, sea $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ cualquiera que sea el valor $x_0 \in (0, 1)$?

668. Formular en términos de «$\varepsilon - \delta$», en sentido positivo, la afirmación siguiente: la función $f(x)$, definida en el punto x_0, no es continua en este punto

669. Supongamos que para ciertos números $\varepsilon > 0$ se pueden hallar los números correspondientes $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, tales que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$.

¿Se puede afirmar que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0, si:

a) los números ε forman un conjunto finito; b) los números ε forman un conjunto infinito de fracciones binarias $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

670. Sea dada la función

$$f(x) = x + 0{,}001\,[x].$$

Comprobar que para cada $\varepsilon > 0{,}001$ se puede hallar un número $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, tal que $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ si $|x'-x|<\delta$, mientras que para $0<\varepsilon \leqslant 0{,}001$ no se puede hacer esto para todos los valores de x.

¿En qué puntos deja de ser continua esta función?

671. Supongamos que para cada número $\delta > 0$, suficientemente pequeño, existe un número $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, tal que se verifica la desigualdad $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$. ¿Se deduce de aquí que la función $f(x)$ es continua para $x=x_0$? ¿Qué propiedad de la función $f(x)$ se describe por las desigualdades dadas?

672. Supongamos que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que, si $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ se tiene $|x-x_0|<\delta$. ¿Se deduce de aquí que la función $f(x)$ es continua para el valor $x=x_0$? ¿Qué propiedad de la función se describe por estas desigualdades?

673. Supongamos que para cada número $\delta > 0$ existe un número $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ tal que, si $|f x)-f(x_0)|<\varepsilon$ se tiene $|x-x_0|<\delta$. ¿Se deduce de aquí que la función $f(x)$ es continua para $x=x_0$? ¿Qué propiedad de la función $f(x)$ se describe por las desigualdades dadas?

Examinar el ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

674. Aplicando razonamientos «$\varepsilon - \delta$», demostrar que las funciones que siguen son continuas: a) $ax+b$; b) x^2; c) x^3; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\operatorname{sen} x$; g) $\cos x$; h) $\operatorname{arctg} x$.

Estudiar la continuidad y representar gráficamente las funciones siguientes:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2; \\ A, & \text{si } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, si $x \neq -1$ y $f(-1)$ es arbitrario

678. a) $f_1(x) = \left|\frac{\operatorname{sin} x}{x}\right|$, si $x \neq 0$ y $f_1(0) = 1$;

b) $f_2(x) = \frac{\operatorname{sin} x}{|x|}$, si $x \neq 0$ y $f_2(0) = 1$.

679. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, si $x\neq 0$ y $f(0)$ es arbitrario.

680. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, si $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

681. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, si $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, si $x\neq 1$ y $f(1)$ es arbitrario.

683. $f(x)=x\ln x^2$, si $x\neq 0$ y $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Hallar los puntos de discontinuidad y estudiar el carácter de estos puntos, si:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

690. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\frac{1}{x}$.

694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

696. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

698. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

699. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

700. $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

Estudiar la continuidad y dibujar los diseños de las gráficas de las siguientes funciones:

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

702. $y=x-[x]$.

703. $y=x[x]$.

704. $y=[x]\sin\pi x$.

705. $y=x^2-[x^2]$.

706. $y=\left[\frac{1}{x}\right]$.

707. $y=x\left[\frac{1}{x}\right]$.

708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

710. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

711. $y=\sec^2\frac{1}{x}$.

712. $y=(-1)^{[x^2]}$.

713. $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

714. $y=\dfrac{1}{x^2\sin^2 x}$.

715. $y=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

717. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

718. $y=1-e^{\frac{1}{x^2}}$.

719. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Estudiar la continuidad y construir las gráficas de las siguientes funciones:

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$.

721. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

723. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

729. ¿Es continua la función

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{si } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

730. Sea

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{si } x<0,\\ a+x, & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

¿Cómo se debe elegir el número a para que la función $f(x)$ sea continua?

731. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y establecer el carácter de los puntos de discontinuidad, si:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{para } 1< x\leqslant 2; \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x & \text{para } |x|\leqslant 1, \\ 1 & \text{para } |x|>1; \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} & \text{para } |x|\leqslant 1, \\ |x-1| & \text{para } |x|>1; \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{para } x \text{ no entero}, \\ 0 & \text{para } x \text{ entero}; \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & \text{para } x \text{ racional}, \\ 0 & \text{para } x \text{ irracional}. \end{cases}$

732. La función $d=d(x)$ representa la distancia mínima del punto x, del eje numérico Ox, al conjunto de sus puntos que está formado por los segmentos $0\leqslant x\leqslant 1$ y $2\leqslant x\leqslant 3$. Hallar la expresión analítica de la función d, construir su gráfica y estudiar su continuidad.

733. La figura E está formada por un triángulo de base 1 y altura 1 y por dos rectángulos de base 1 cada uno y de alturas 2 y 3 (fig. 5). La función $S=S(y)$ $(0\leqslant y<+\infty)$ representa el área de la parte de la figura E que está comprendida entre las rectas paralelas $Y=0$ e $Y=y$; la función $b=b(y)$ $(0\leqslant y<+\infty)$ es la longitud de la sección de la figura E por la recta $Y=y$. Hallar las expresiones analíticas de las funciones S y b, construir sus gráficas y estudiar la continuidad.

Fig. 5

734. Demostrar que la función de Dirichlet

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\right\}$$

es discontinua para cada valor x.

735. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=x\chi(x),$$

donde $\chi(x)$ es la función de Dirichlet (véase el problema anterior). Construir el diseño de la gráfica de esta función.

736. Demostrar que la función de Riemann

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x=\frac{m}{n}, \text{ donde } m \text{ y } n \text{ son números primos entre sí}, \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional}, \end{cases}$$

es discontinua para cada valor racional de x y es continua para cada valor irracional de x. Construir el diseño de la gráfica de esta función.

737. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$, dada del modo siguiente:

$$f(x)=\frac{nx}{n+1},$$

si x es una fracción racional irreducible $\frac{m}{n}$ $(n\geqslant 1)$, y

$$f(x)=|x|,$$

si x es un número irracional. Construir el diseño de la gráfica de esta función.

738. La función $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ está definida para todos los valores del argumento x, a excepción de $x=0$. ¿Qué valor debe asignarse a la función $f(x)$ en el punto $x=0$, para que sea continua para $x=0$?

739. Comprobar que, cualquiera que sea la elección del número $f(1)$, la función $f(x)=\frac{1}{1-x}$ siempre será discontinua para $x=1$.

740. La función $f(x)$ carece de sentido para $x=0$. Determinar el número $f(0)$ de tal modo que $f(x)$ sea continua para $x=0$, si:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

b) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

c) $f(x)=\sin x \sin\frac{1}{x}$;

d) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

f) $f(x)=x^x$ $(x>0)$;

g) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. ¿Es obligatoriamente discontinua en un punto dado x_0 la suma de dos funciones $f(x)+g(x)$, si: a) la función $f(x)$ es continua y la función $g(x)$ es discontinua para $x=x_0$; b) ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas para $x=x_0$?

742. ¿Es obligatoriamente discontinua en un punto dado x_0 el producto de dos funciones $f(x)\,g(x)$, si: a) la función $f(x)$ es continua

y la función $g(x)$ es discontinua en este punto; b) ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas para $x = x_0$? Construir los ejemplos correspondientes.

743. ¿Se puede afirmar que el cuadrado de una función discontinua es también una función discontinua?

Construir un ejemplo de una función que sea discontinua en todos los puntos y cuyo cuadrado sea una función continua.

744. Estudiar la continuidad de las funciones $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$, si:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y $g(x) = 1 + x^2$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y $g(x) = x(1 - x^2)$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y $g(x) = 1 + x - [x]$.

745. Estudiar la continuidad de la función compuesta $y = f(u)$, donde $u = \varphi(x)$, si

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{para } 0 < u \leqslant 1; \\ 2 - u & \text{para } 1 < u < 2 \end{cases}$$

y

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \text{ racional}, \\ 2 - x & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

$(0 < x < 1)$

746. Demostrar que, si $f(x)$ es una función continua, la función

$$F(x) = |f(x)|$$

también es continua.

747. Demostrar que, si la función $f(x)$ es continua, también lo es la función

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{si } f(x) < -c; \\ f(x), & \text{si } |f(x)| \leqslant c; \\ c, & \text{si } f(x) > c, \end{cases}$$

donde c es un número positivo arbitrario.

748. Demostrar que, si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, las funciones

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \quad \text{y} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

también son continuas en a, b.

749. Demostrar que, si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, las funciones

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad \text{y} \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

también lo son.

750. Supongamos que la función $f(x)$ está definida y acotada en el segmento $[a, b]$. Demostrar que las funciones

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{y} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

son continuas a la izquierda en el segmento $[a, b]$.

751. Demostrar que, si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leqslant x < +\infty$ y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

entonces esta función está acotada en el intervalo dado.

752. Supongamos que la función $f(x)$ es continua y está acotada en el intervalo $(x_0, +\infty)$. Demostrar que, cualquiera que sea el número T, existe una sucesión $x_n \to +\infty$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones continuas periódicas, definidas para $-\infty < x < +\infty$, y

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Demostrar que

$$\varphi(x) \equiv \psi(x).$$

754. Demostrar que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de 1ª especie.

755. Demostrar que, si la función $f(x)$ posee las propiedades siguientes: 1) está definida y es monótona en el segmento $[a, b]$; 2) toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces esta función es continua en $[a, b]$.

756. Comprobar que la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$, si $x \neq a$ y $f(a) = 0$, toma en cualquier segmento $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, sin embargo, no es continua en $[a, b]$.

757. Demostrar que, si la función $f(x)$ es continua en el intervalo (a, b) y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores arbitrarios de este intervalo, entonces, entre ellos, siempre existe un número ξ tal que

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)].$$

758. Sea $f(x)$ continua en el intervalo (a, b) y

$$l=\varliminf_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad L=\varlimsup_{x\to a} f(x).$$

Demostrar que, cualquiera que sea el número λ, donde $l \leqslant \lambda \leqslant L$, existe una sucesión $x_n \longrightarrow a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda.$$

§ 8. Función inversa. Funciones en forma paramétrica

1.° *Existencia y continuidad de la función inversa.* Si la función $y=f(x)$ posee las siguientes propiedades: 1) está definida y es continua en el intervalo (a, b); 2) es monótona en sentido estricto en este intervalo, entonces existe una función inversa uniforme $x=f^{-1}(y)$, definida, continua y, respectivamente, monótona en sentido estricto en el intervalo (A, B), donde $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ y $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Se entiende por rama uniforme continua de la función multiforme inversa de una función continua dada $y=f(x)$, cualquier función uniforme continua $x=g(y)$, definida en la región máxima de su existencia y que satisfaga en esta región a la ecuación $f[g(y)]=y$.

2.° *Continuidad de una función dada en forma paramétrica.* Si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ están definidas y son continuas en el intervalo (α, β) y la función $\varphi(t)$ es estrictamente monótona en este intervalo, el sistema de ecuaciones

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

determina a y como función uniforme y continua de x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

en el intervalo (a, b), donde $a = \lim\limits_{t\to \alpha+0} \varphi(t)$ y $b = \lim\limits_{t\to \beta-0} \varphi(t)$.

Problemas:

759. Hallar la función inversa de la función homográfica

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0).$$

¿En qué caso la función inversa coincide con la función dada?

760. Hallar la función inversa $x = x(y)$, si

$$y=x+[x].$$

761. Comprobar que existe una función continua única $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ que satisface a la ecuación de Kepler

$$y-\varepsilon \sin y=x \quad (0\leqslant\varepsilon<1).$$

762. Comprobar que la ecuación

$$\operatorname{ctg} x=kx$$

para cada número real k $(-\infty<k<+\infty)$ tiene en el intervalo $0<x<\pi$ una raíz continua única $x=x(k)$.

763. ¿Puede tener función inversa uniforme una función no monótona $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$? Examinar el ejemplo:

$$y=\begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x, & \text{si } x \text{ es irracional.}\end{cases}$$

764. ¿En qué caso la función $y=f(x)$ y la función inversa $x=f^{-1}(y)$ representan una misma función?

765. Comprobar que la función inversa de la función discontinua

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$$

es una función continua.

766. Demostrar que, si la función $f(x)$ está definida y es estrictamente monótona en el segmento $[a, b]$ y

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a) \quad (a\leqslant x_n\leqslant b),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

Determinar las ramas uniformes continuas de las funciones inversas para las siguientes funciones:

767. $y=x^2$.

768. $y=2x-x^2$.

769. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

770. $y=\sin x$.

771. $y=\cos x$.

772. $y=\operatorname{tg} x$.

773. Comprobar que el conjunto de valores de la función continua

$$y=1+\sin x,$$

correspondientes al intervalo $(0<x<2\pi)$, es un segmento.

774. Demostrar la igualdad

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Demostrar la igualdad

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

776. Demostrar el teorema de la suma para los arcos tangentes:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ es una función que toma uno de los tres valores: 0, 1, − 1.

¿Para qué valores de y, para un valor dado de x, es posible una discontinuidad de la función ε? Construir en el plano Oxy las regiones correspondientes de continuidad de la función ε y determinar el valor de esta función en cada una de las regiones obtenidas.

777. Demostrar el teorema de la suma para los arcos senos:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$$

$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1)$, donde

$$\varepsilon = 0, \quad \text{si} \quad xy \leqslant 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} x, \quad \text{si} \quad xy > 0 \ \text{y} \ x^2 + y^2 > 1.$$

778. Demostrar el teorema de la suma para los arcos cosenos:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon} \arccos (xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\pi\varepsilon$$

$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1)$, donde

$$\varepsilon = 0, \quad \text{si} \quad x + y \geqslant 0,$$

y

$$\varepsilon = 1, \quad \text{si} \quad x + y < 0.$$

779. Construir las gráficas de las funciones:

a) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

b) $y = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) - 2 \arcsin x$.

780. Hallar la función $y = y(x)$, dada por las ecuaciones:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

¿En qué región está definida esta función?

781. Sea

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

¿En qué regiones de variación del parámetro t se puede considerar la variable y como función uniforme de la variable x? Hallar las expresiones de y para las diferentes regiones.

782. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

determine y como función uniforme de x?

Examinar el ejemplo: $x = \operatorname{sen}^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. ¿En qué condiciones dos sistemas de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

y

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

determinan una misma función $y = y(x)$?

784. Supongamos que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ están definidas y son continuas en el intervalo (a, b) y sean

$$A = \inf_{a<x<b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a<x<b} \varphi(x).$$

¿En qué caso existe una función uniforme $f(x)$, definida en el intervalo (A, B) y tal que

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{para} \quad a < x < b?$$

§ 9. Continuidad uniforme de una función

1.° *Definición de continuidad uniforme.* Una función $f(x)$ se llama uniformemente continua en un conjunto dado (en un intervalo, segmento, etc.) $X = \{x\}$, si $f(x)$ está definida en X y para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para cualesquiera valores x', $x'' \in X$, la desigualdad

$$|x' - x''| < \delta$$

implica la desigualdad

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2.° *Teorema de Cantor.* Una función $f(x)$, definida y continua en un segmento acotado $[a, b]$, es uniformemente continua en este segmento.

Problemas:

785. En el taller de una fábrica se producen láminas cuadradas cuyos lados x pueden tomar valores de 1 a 10 cm. ¿Con qué tolerancia δ se pueden fabricar los lados de estas láminas para que, independientemente de sus longitudes (entre los límites indicados), sus áreas y se diferencien de la proyectada menos de ε? Efectuar el cálculo numérico, si:

a) $\varepsilon=1\ cm^2$; b) $\varepsilon=0{,}01\ cm^2$; c) $\varepsilon=0{,}0001\ cm^2$.

786. Un manguito cilíndrico de anchura ε y longitud δ está sujeto a la curva $y=\sqrt[3]{x}$ y se desliza sobre ella de modo que su eje permanece paralelo al eje Ox. ¿A qué tiene que ser igual δ, para que dicho manguito recorra libremente el trozo de la curva determinado por las desigualdades $-10\leqslant x\leqslant 10$, si: a) $\varepsilon=1$; b) $\varepsilon=0{,}1$; c) $\varepsilon=0{,}01$; d) ε es arbitrariamente pequeño?

787. Formular en términos de «$\varepsilon-\delta$», en sentido positivo, la afirmación: la función $f(x)$ es continua en cierto conjunto (en un intervalo, segmento, etc.), pero no es uniformemente continua en este conjunto.

788. Comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

es continua en el intervalo $(0,\ 1)$, pero no es uniformemente continua en este intervalo.

789. Comprobar que la función

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$$

es continua y está acotada en el intervalo $(0,\ 1)$, pero no es uniformemente continua en este intervalo.

790. Comprobar que la función

$$f(x)=\sin x^2$$

es continua y está acotada en el intervalo infinito $-\infty<x<+\infty$ pero no es uniformemente continua en este intervalo.

791. Demostrar que, si la función $f(x)$ está definida y es continua en la región $a\leqslant x<+\infty$ y existe el límite finito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

entonces $f(x)$ es uniformemente continua en esta región.

792. Comprobar que la función no acotada

$$f(x)=x+\sin x$$

es uniformemente continua en todo el eje $-\infty<x<+\infty$.

793. ¿Es uniformemente continua la función $f(x)=x^2$ en el intervalo: a) $(-l,\ l)$, donde l es un número positivo cualquiera, arbitrariamente grande; b) en el intervalo $(-\infty,\ +\infty)$?

Estudiar la continuidad uniforme de las funciones que siguen, en las regiones dadas:

794. $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$ $\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

795. $f(x)=\ln x$ $\quad(0<x<1)$.

796. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad(0<x<\pi)$.

797. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ $\quad(0<x<1)$.

798. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(1\leqslant x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x$ $\quad(0\leqslant x<+\infty)$.

801. Comprobar que la función $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ es uniformemente continua en cada intervalo

$$J_1=(-1<x<0)\quad \text{y}\quad J_2=(0<x<1)$$

por separado, pero no es uniformemente continua en su suma

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}.$$

801.1. Demostrar que, si la función $f(x)$ es uniformemente continua en cada uno de los segmentos $[a,\ c]$ y $[c,\ b]$, entonces esta función es uniformemente continua en el segmento total $[a,\ b]$.

802. Para $\varepsilon>0$ hallar $\delta=\delta(\varepsilon)$ (uno cualquiera) que satisfaga a las condiciones de continuidad uniforme para la función $f(x)$ en el intervalo indicado, si:

a) $f(x)=5x-3$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

b) $f(x)=x^2-2x-1$ $\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

c) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad(0{,}1\leqslant x\leqslant 1)$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

e) $f(x)=2\sin x-\cos x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

f) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ y $f(0)=0$ $\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

803. ¿En cuántos segmentos, iguales entre sí, es suficiente dividir el segmento $[1, 10]$ para que la oscilación de la función $f(x)=x^2$ en cada uno de estos segmentos sea menor que 0,0001?

804. Demostrar que la suma y el producto de un número acotado de funciones uniformemente continuas en un intervalo (a, b) son uniformemente continuas en este intervalo.

805. Demostrar que, si una función monótona y acotada $f(x)$ es continua en un intervalo finito o infinito (a, b), entonces esta función es uniformemente continua en el intervalo (a, b).

806. Demostrar que, si una función $f(x)$ es uniformemente continua en un intervalo finito (a, b), entonces existen los límites

$$A=\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ y } B=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

¿Es válido este teorema para un intervalo infinito (a, b)?

806.1. Demostrar que, para que una función $f(x)$, definida y continua en un intervalo finito (a, b), pueda prolongarse continuamente en el segmento $[a, b]$, es necesario y suficiente que la función $f(x)$ sea uniformemente continua en el intervalo (a, b).

807. Se llama módulo de continuidad de una función $f(x)$ en el intervalo (a, b) la función

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|,$$

donde x_1 y x_2 son puntos arbitrarios de (a, b), ligados por la condición $|x_1-x_2|\leqslant\delta$.

Demostrar que, para la continuidad uniforme de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), es necesario y suficiente que

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

808. Obtener una cota para el módulo de continuidad $\omega_f(\delta)$ (véase el problema anterior) de la forma

$$\omega_f(\delta)\leqslant C\delta^\alpha,$$

donde C y α son constantes, si:

a) $f(x)=x^3 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$;

b) $f(x)=\sqrt{x} \quad (0\leqslant x\leqslant a)$ и $(a<x<+\infty)$;

c) $f(x)=\sin x+\cos x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

§ 10. Ecuaciones funcionales

Problemas:

809. Demostrar que la única función continua $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ que satisface a la ecuación

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{1}$$

para todos los valores reales de x e y, es la función lineal homogénea

$$f(x)=ax,$$

donde $a=f(1)$ es una constante arbitraria.

810. Demostrar que una función monótona $f(x)$ que satisfaga a la ecuación (1), es lineal homogénea.

811. Demostrar que una función $f(x)$ que satisfaga a la ecuación (1) y esté acotada en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ arbitrariamente pequeño, es lineal homogénea.

812. Demostrar que la única función continua $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{2}$$

para todos los valores de x e y, es la función exponencial

$$f(x)=a^x,$$

donde $a=f(1)$ es una constante positiva.

813. Demostrar que la función $f(x)$, no idénticamente nula, que está acotada en el intervalo $(0, \varepsilon)$ y satisface a la ecuación (2), es la función exponencial.

814. Demostrar que la única función continua $f(x)$ $(0<x<+\infty)$, no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(x\,y)=f(x)+f(y),$$

para todos los valores positivos x e y, es la función logarítmica

$$f(x)=\log_a x,$$

donde a es una constante positiva.

815. Demostrar que la única función continua $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(xy)=f(x)f(y), \tag{3}$$

para todos los valores positivos x e y, es la función potencial

$$f(x)=x^a,$$

donde a es una constante.

816. Hallar todas las funciones continuas $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ que satisfacen a la ecuación (3) para todos los valores reales de x e y.

817. Comprobar que la función discontinua

$$f(x)=\operatorname{sgn} x$$

satisface a la ecuación (3).

818. Hallar todas las funciones continuas $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ que satisfacen a la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

para todos los valores reales de x e y.

819. Hallar todas las funciones continuas acotadas $f(x)$ y $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

para todos los valores reales de x e y, y también a las condiciones de normalización:

$$f(0)=1 \quad \text{y} \quad g(0)=0.$$

Indicación. Examinar la función

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x).$$

820. Sean

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

y

$$\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

las diferencias finitas de la función $f(x)$ de primero y segundo órdenes, respectivamente.

Demostrar que, si la función $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ es continua y

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0,$$

entonces esta función es lineal, es decir,

$$f(x)=ax+b,$$

donde a y b son constantes.

Capítulo 2 CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 1. Derivada de una función explícita

1.° *Definición de derivada.* Si x y $x_1=x+\Delta x$ son valores de la variable independiente, la diferencia

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

se llama incremento de la función $y=f(x)$ en el segmento $[x, x_1]$.

La expresión

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (1)$$

si tiene sentido, se llama derivada, y la función misma $f(x)$ se llama en este caso derivable.

Geométricamente, el número $f'(x)$ representa el coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en su punto x $(\operatorname{tg}\varphi=f'(x))$ (fig. 6).

2.° *Reglas fundamentales de derivación.* Si c es una constante y las funciones $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ son derivables, se tiene

1) $c'=0$;
2) $(cu)'=cu'$;
3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;
4) $(uv)'=u'v+v'u$;
5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$;
6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$ (n es una constante);
7) si las funciones $y=f(u)$ y $u=(x)$ son derivables, se tiene:

$$y'_x=y'_u u'_x.$$

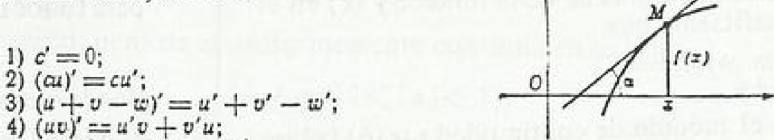


Fig. 6.

3.° *Fórmulas principales.* Si x es la variable independiente, se tiene:

I. $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n es una constante)

II. $(\sin x)'=\cos x$.

III. $(\cos x)'=-\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

V. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$;
$(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0)$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4.° *Derivadas laterales.* Las expresiones

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llaman derivada a la izquierda y a la derecha, respectivamente, de la función $f(x)$ en el punto x.

Para la existencia de la derivada $f'(x)$ es necesario y suficiente que

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5.° *Derivada infinita.* Si la función $f(x)$ es continua en el punto x y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto x derivada infinita. En este caso, la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x es perpendicular al eje Ox.

Problemas:

821. Determinar el incremento Δx del argumento x y el incremento correspondiente Δy de la función $y = \lg x$, si x varía desde 1 hasta 1000.

822. Determinar el incremento Δx del argumento x y el incremento correspondiente Δy de la función $y = \frac{1}{x^2}$, si x varía desde 0,01 hasta 0,001.

823. La variable x obtiene un incremento Δx. Determinar el incremento Δy, si:

a) $y = ax + b$; b) $y = ax^2 + bx + c$; c) $y = a^x$.

824. Demostrar que:

a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

b) $\Delta[f(x)\,g(x)] = g(x+\Delta x)\,\Delta f(x) + f(x)\,\Delta g(x)$.

825. Por los puntos $A\,(2,\ 4)$ y $A'\,(2+\Delta x,\ 4+\Delta y)$ de la curva $y = x^2$ se ha trazado la secante AA'. Hallar el coeficiente angular de esta secante, si: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$; d) Δx es arbitrariamente pequeño.

¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la curva dada en el punto A?

826. El segmento $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ del eje Ox se aplica sobre el eje Oy mediante la función $y = x^3$. Determinar el coeficiente medio de dilatación y efectuar el cálculo numérico, si:

a) $h = 0{,}1$; b) $h = 0{,}01$; c) $h = 0{,}001$.

¿A qué es igual el coeficiente de dilatación de esta aplicación en el punto $x = 1$?

827. La ley del movimiento de un punto sobre el eje Ox viene dada por la fórmula

$$x = 10t + 5t^2,$$

donde t es el tiempo en segundos y x es la distancia en metros. Hallar la velocidad media en el intervalo de tiempo $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ y efectuar el cálculo numérico, si: a) $\Delta t = 1$; b) $\Delta t = 0{,}1$; c) $\Delta t = 0{,}01$. ¿Cuál es la velocidad del movimiento en el instante $t = 20$?

828. Partiendo de la definición de derivada, hallar directamente las derivadas de las siguientes funciones: a) x^2; b) x^3; c) $\frac{1}{x}$; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\operatorname{tg} x$; g) $\operatorname{ctg} x$; h) $\arcsen x$; i) $\arccos x$; j) $\operatorname{arctg} x$.

829. Calcular $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$, si

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Calcular $f'(2)$, si

$$f(x) = x^2 \sin(x-2).$$

831. Calcular $f'(1)$, si

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Hallar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

si la función $f(x)$ es derivable en el punto a.

833. Demostrar que, si la función $f(x)$ es derivable y n es un número natural, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Recíprocamente, si para la función $f(x)$ existe el límite (1), ¿se puede afirmar que esta función admite derivada? Examinar el ejemplo de la función de Dirichlet (véase el cap. I, problema 734).

Utilizando la tabla de derivadas, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

834. $y=2+x-x^2$.

¿A qué es igual $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$.

Para qué valores de x: a) $y'(x)=0$; b) $y'(x)=-2$; c) $y'(x)=10$?

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

841. $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

842.1. $y=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

844. Demostrar la fórmula

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

Hallar las derivadas de las funciones:

845. $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

850. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

846. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

847. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

852. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

848. $y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

849. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

854. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

857. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

858. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

859. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$.

867. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

866. $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

869. $y=\frac{1}{\cos^n x}$.

868. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

870. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

876. $y=e^{-x^2}$.

872. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$.

877. $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

873. $y=4\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^2 x}+\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

882. $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$.

886. $y=\lg^3 x^2$.

888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ $(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

895. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

896. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$.

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$ $(0\leqslant|a|<|b|)$.

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

908. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

909. $y=\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$.

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

912. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$.

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

915. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

921. $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$.

923. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

925. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>b\geqslant 0)$.

928. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

929. $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$.

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

939. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

940. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

941. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arcctg}x^6$.

943. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

944. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

945. $y=\operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ $(a>0)$.

946. $y=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$.

947. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$;

948. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

949. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$
$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

950. $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

951. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

952. $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

953. $y=\arcsin\left(\frac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}\right)$.

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

956. $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$.

958. $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$.

959. $y=e^{m\arcsin x}\,[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]$.

960. $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

960.1. $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}$.

960.2. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}$.

960.3. $y=\ln^2(\sec 2\sqrt[3]{x})$.

961. $y=x+x^x+x^{x^x}\quad(x>0)$.

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}\quad(a>0,\ x>0)$.

963. $y=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

965. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

965.1. $y=\left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

966. $y=\log_x e$.

967. $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

968. $y=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$.

970. $y=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

971. $y=\frac{b}{a}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)\quad(0\leq|b|<a)$.

972. Hallar la derivada de la función

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}),$$

introduciendo la variable intermedia $u=\cos^2 x$.

Aplicando el método indicado en el ejercicio 972, hallar las derivadas de las funciones:

973. $y=(\operatorname{arc\,cos}x)^2\left[\ln^2(\operatorname{arc\,cos}x)-\ln(\operatorname{arc\,cos}x)+\frac{1}{2}\right]$.

974. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\frac{e^{-x^2}\operatorname{arc\,sin}(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

976. $y=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arc\,ctg}a^{-x}$.

977. Hallar las derivadas y construir las gráficas de las funciones y sus derivadas, si:

a) $y=|x|$; b) $y=x|x|$; c) $y=\ln|x|$.

978. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; c) $y=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{|x|}$;

b) $y=|\sin^3 x|$; d) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Hallar las derivadas y construir las gráficas de las funciones y sus derivadas:

979. $y=\begin{cases}1-x & \text{si } -\infty<x<1;\\ (1-x)(2-x) & \text{si } 1\leq x\leq 2;\\ -(2-x) & \text{si } 2<x<+\infty.\end{cases}$

980. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2 & \text{si } a\leq x\leq b;\\ 0 & \text{fuera del segmento } [a,b].\end{cases}$

981. $y=\begin{cases}x & \text{si } x<0;\\ \ln(1+x) & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$

982. $y=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x & \text{si } |x|\leq 1;\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\frac{x-1}{2} & \text{si } |x|>1.\end{cases}$

983. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & \text{si } |x|\leq 1;\\ \frac{1}{e} & \text{si } |x|>1.\end{cases}$

984. La derivada del logaritmo de la función dada se llama derivada logarítmica de dicha función:

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Hallar la derivada logarítmica de la función y, si:

a) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; b) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

c) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$; d) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

985. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones derivables de x. Hallar la derivada de la función y, si:

a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; b) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

c) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;

d) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Hallar y', si:

a) $y=f(x^2)$; b) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$;

c) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; d) $y=f\{f[f(x)]\}$,

donde $f(u)$ es una función derivable.

986.1. Hallar $f'(0)$, si:

$$f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000).$$

987. Demostrar la siguiente regla de derivación de un determinante de n-ésimo orden:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x) \ldots f_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k1}(x) f_{k2}(x) \ldots f_{kn}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x) \ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x) \ldots f_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{k1}(x) f'_{k2}(x) \ldots f'_{kn}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x) \ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Hallar $F'(x)$, si:

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Hallar $F'(x)$, si:

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Se da la gráfica de una función. Construir aproximadamente la gráfica de su derivada.

991. Comprobar que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0; \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

tiene derivada discontinua.

992. ¿Cuál es la condición para que la función

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)\ \text{y}\ f(0)=0$$

sea: a) continua en $x=0$; b) derivable en $x=0$; c) admita derivada continua en $x=0$?

993. ¿Cuál es la condición para que la función

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}\quad (x\neq 0)\ \text{y}\ f(0)=0\quad (m>0)$$

admita: a) derivada acotada en un entorno del origen de coordenadas; b) derivada no acotada en dicho entorno?

994. Hallar $f'(a)$, si

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

y la función $\varphi(x)$ es continua en $x=a$.

995. Comprobar que la función

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función continua y $\varphi(a)\neq 0$, no admite derivada en el punto a.

¿A qué son iguales las derivadas laterales $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$?

996. Construir un ejemplo de una función continua que no tenga derivadas en los puntos dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Comprobar que en cualquier entorno del punto $x=0$, la función

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|\quad (x\neq 0)\ \text{y}\ f(0)=0$$

tiene puntos en los cuales la función no es derivable, a pesar de que la misma es derivable en el propio punto $x=0$.

Construir el diseño de la gráfica de esta función.

998. Comprobar que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

admite derivada solamente para $x=0$.

999. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; c) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

b) $y=|\cos x|$; d) $y=\arcsin(\cos x)$;

e) $y=\begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{si} \quad |x|\leqslant 1; \\ |x|-1 & \text{si} \quad |x|>1. \end{cases}$

Para la función $f(x)$, hallar la derivada a la izquierda $f'_-(x)$ y la derivada a la derecha $f'_+(x)$, si:

1000. $f(x)=|x|$. 1001. $f(x)=[x]\sin \pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$. 1006. $f(x)=|\ln|x||$ $(x\neq 0)$.

1007. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ $(x\neq 2)$, $f(2)=0$.

1009. Comprobar que la función $f(x)=x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$, es continua en $x=0$ pero no tiene en este punto derivada a la izquierda y derivada a la derecha.

1009.1. Sea x_0 un punto de discontinuidad de 1ª especie de la función $f(x)$. Las expresiones

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

y

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

se llaman derivadas laterales generalizadas (a la izquierda y a la derecha, respectivamente) de la función $f(x)$ en el punto x_0.

Hallar $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ en los puntos de discontinuidad x_0 de la función $f(x)$, si:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

b) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

1010. Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x\leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{si} \quad x>x_0. \end{cases}$$

¿Cómo se deben elegir los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en el punto x_0?

1011. Sea

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x\leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{si} \quad x>x_0, \end{cases}$$

donde la función $f(x)$ es derivable a la izquierda en $x=x_0$.

¿Cuál debe ser la elección de los coeficientes a y b de la función $F(x)$ para que ésta sea continua y derivable en el punto x_0?

1012. Construir en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$ la conjugación de dos semirrectas

$$y=k_1(x-a) \quad (-\infty<x<a) \quad \text{e} \quad y=k_2(x-b) \quad (b<x<+\infty)$$

mediante la parábola cúbica

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c),$$

donde los parámetros A y c deben ser elegidos adecuadamente.

1013. Completar la parte de la curva $y=\frac{m^2}{|x|}$ $(|x|>c)$ mediante la parábola

$$y=a+bx^2 \quad (|x|\leqslant c)$$

(donde a y b son unos parámetros desconocidos), de tal modo que resulte una curva lisa.

1014. ¿Se puede afirmar que la suma

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

no admite derivada en el punto $x=x_0$, si: a) la función $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, y la función $g(x)$ no tiene derivada en este punto; b) ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tienen derivada en el punto x_0?

1015. ¿Se puede afirmar que el producto

$$F(x)=f(x)\,g(x)$$

no admite derivada en el punto x_0, si: a) la función $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, y la función $g(x)$ no tiene derivada en este punto; b) ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tienen derivada en el punto x_0?

Examinar los ejemplos: a) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$; b) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$, donde $x_0=0$.

1016. ¿Qué se puede decir de la derivabilidad de la función

$$F(x)=f(g(x))$$

en el punto dado $x=x_0$, si: a) la función $f(x)$ tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función $g(x)$ no tiene derivada en el punto $x=x_0$; b) la función no tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función $g(x)$ tiene derivada en el punto $x=x_0$; c) la función $f(x)$ no tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función $g(x)$ no tiene derivada en el punto $x=x_0$?

Examinar los ejemplos:

a) $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$; b) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$; c) $f(x)=2x+|x|$, $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$, donde $x_0=0$.

1017. ¿En qué puntos la gráfica de la función

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

tiene tangente vertical?

Construir dicha gráfica.

1018. ¿Puede tener una función $f(x)$ en un punto de discontinuidad: a) derivada finita; b) derivada infinita?

Examinar el ejemplo: $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

1019. Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo acotado (a, b) y

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

¿necesariamente tiene que ser

$$1)\ \lim_{x\to a} f'(x)=\infty;\quad 2)\ \overline{\lim_{x\to a}}|f'(x)|=\infty?$$

Examinar el ejemplo: $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$ cuando $x\to 0$.

1020. Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo acotado (a, b) y

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\infty,$$

¿necesariamente tiene que ser

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty?$$

Examinar el ejemplo: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ cuando $x\to 0$.

1021. Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en el intervalo $(x_0, +\infty)$ y que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ¿Se deduce de esto que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

Examinar el ejemplo:

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. Supongamos que una función acotada $f(x)$ es derivable en el intervalo $(x_0, +\infty)$ y que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$; ¿Se deduce de esto que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ finito o infinito?

Examinar el ejemplo:

$$f(x)=\cos(\ln x).$$

1023. ¿Se puede derivar término a término una desigualdad entre las funciones?

1024. Deducir las fórmulas para las sumas:

$$P_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

y

$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}.$$

Indicación. Examinar $(x+x^2+\ldots+x^n)'$.

1025. Deducir las fórmulas para las sumas:

$$S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$$

y

$$T_n=\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx.$$

1025.1. Deducir la fórmula para la suma:

$$S_n=\operatorname{ch} x+2\operatorname{ch} 2x+\ldots+n\operatorname{ch} nx.$$

Indicación. $S_n=(\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} 2x+\ldots+\operatorname{sh} nx)'$.

1026. Aplicando la identidad

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

deducir la fórmula para la suma

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

1027. Demostrar que la derivada de una función derivable par es una función impar, y que la derivada de una función derivable impar es una función par.

Dar una interpretación geométrica de este hecho.

1028. Demostrar que la derivada de una función derivable periódica es de nuevo una función periódica del mismo período.

1029. ¿Con qué velocidad aumenta el área de un círculo en el momento en que su radio se hace igual a $R = 10$ cm, si dicho radio crece uniformemente con la velocidad 2 cm/s?

1030. ¿Con qué velocidad varían el área y la diagonal de un rectángulo en el momento en que uno de sus lados $x = 20$ m, y otro de sus lados $y = 15$ m, si el primer lado disminuye con la velocidad de 1 m/s mientras que el segundo aumenta con la velocidad de 2 m/s?

1031. Desde un mismo puerto salieron simultáneamente un barco A en dirección norte y un barco B en dirección este. ¿Con qué velocidad crece la distancia entre ellos, si la velocidad del barco A es igual a 30 km/h y la del barco B es igual a 40 km/h?

1032. Sea

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-2, & \text{si} \quad 2<x<+\infty,\end{cases}$$

y sea $S(x)$ el área de la superficie limitada por la curva $y=f(x)$ el eje Ox y la perpendicular al eje Ox, trazada por el punto x $(x\geqslant 0)$.

Formar la expresión analítica de la función $S(x)$, hallar la derivada $S'(x)$ y construir la gráfica de la función $y=S'(x)$.

1033. La función $S(x)$ es el área de la superficie limitada por el arco de la circunferencia $y=\sqrt{a^2-x^2}$, el eje Ox y dos perpendiculares al eje Ox, trazadas por los puntos O y x $(|x|\leqslant a)$.

Formar la expresión analítica de la función $S(x)$, hallar la derivada $S'(x)$ y construir la gráfica de esta derivada.

§ 2. Derivada de la función inversa. Derivada de una función dada en forma paramétrica. Derivada de una función dada en forma implícita.

1° *Derivada de la función inversa.* Una función derivable $y=f(x)$ $(a<x<b)$, con derivada $f'(x)\neq 0$, tiene función inversa uniforme y continua $x=f^{-1}(y)$, siendo también la función inversa derivable, y verificándose la fórmula

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2.° *Derivada de una función dada en forma paramétrica.* El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}\quad(\alpha<t<\beta),$$

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones derivables y $\varphi'(t)\neq 0$, determina a y, en cierta región, como función uniforme y derivable de x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

la derivada de esta función puede hallarse por la fórmula

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

3.° *Derivada de una función dada en forma implícita.* Si una función derivable $y=y(x)$ satisface a la ecuación

$$F(x,\ y)=0,$$

la derivada $y'=y'(x)$ de esta función implícita puede hallarse de la ecuación

$$\frac{d}{dx}[F(x,\ y)]=0,$$

donde $F(x, y)$ se considera como función compuesta de la variable x.

(Véase más detalladamente respecto de las funciones implícitas derivables en la parte II, cap. VI, § 3.)

Problemas:

1034. Comprobar que existe una función uniforme $y=y(x)$, definida por la ecuación

$$y^3+3y=x,$$

y hallar su derivada y'_x.

1035. Comprobar que existe una función uniforme $y = y(x)$, definida por la ecuación

$$y - \varepsilon \sin y = x \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1),$$

y hallar la derivada y'_x.

1036. Determinar los campos de existencia de las funciones inversas $x = x(y)$ y hallar sus derivadas, si:

a) $y = x + \ln x \ (x > 0)$; c) $y = \operatorname{sh} x$;
b) $y = x + e^x$; d) $y = \operatorname{th} x$.

1037. Separar las ramas uniformes y continuas de las funciones inversas $x = x(y)$, hallar sus derivadas y construir las gráficas, si:

a) $y = 2x^2 - x^4$; b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; c) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038. Construir el diseño de la gráfica de la función $y = y(x)$ y hallar la derivada y'_x, si: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. ¿A qué es igual $y'_x(x)$ en $x = 0$ y en $x = -1$? ¿En qué punto $M(x, y)$ la derivada $y'_x(x) = 0$?

Hallar las derivadas y'_x (los parámetros son positivos), si:

1039. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $\quad y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$.
1040. $x = \sin^2 t$, $\quad y = \cos^2 t$.
1041. $x = a \cos t$, $\quad y = b \sin t$.
1042. $x = a \operatorname{ch} t$, $\quad y = b \operatorname{sh} t$.
1043. $x = a \cos^3 t$, $\quad y = a \sin^3 t$.
1044. $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1 - \cos t)$.
1045. $x = e^{2t} \cos^2 t$, $\quad y = e^{2t} \sin^2 t$.
1046. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\quad y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Comprobar que la función $y = y(x)$, definida por el sistema de ecuaciones

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

es derivable para $t = 0$, a pesar de que su derivada en este punto no puede hallarse por la fórmula ordinaria.

Hallar las derivadas y'_x de las siguientes funciones, dadas en forma implícita:

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.
¿A qué es igual y' para $x = 2$ e $y = 4$, y para $x = 2$ e $y = 0$?
1049. $y^2 = 2px$ (parábola).
1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse).
1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (parábola).
1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (astroide).
1053. $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (espiral logarítmica).
1054. Hallar y'_x, si:
a) $r = a\varphi$ (espiral de Arquímedes);
b) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (cardioide);
c) $r = ae^{m\varphi}$ (espiral logarítmica),

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ son las coordenadas polares.

§ 3. Significado geométrico de la derivada

1.° *Ecuaciones de la tangente y de la normal.* Las ecuaciones de la tangente MT y de la normal MN a la gráfica de una función derivable

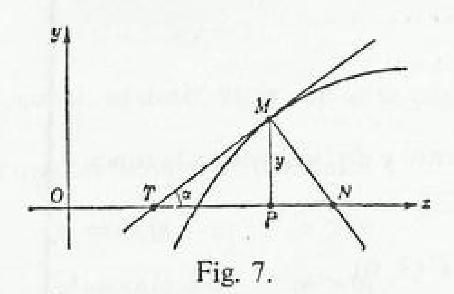


Fig. 7.

$y = f(x)$ en su punto $M(x, y)$ (fig. 7), tienen la forma

$$Y - y = y'(X - x)$$

y

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

respectivamente, donde X, Y son las coordenadas variables de la tangente o de la normal e $y' = f'(x)$ es el valor de la derivada en el punto de contacto.

2.° *Segmentos tangente y normal.* Para los segmentos tangente y normal: PT es la subtangente, PN es la subnormal, MT es la tangente,

MN es la normal (fig. 7); como $\operatorname{tg}\varphi = y'$, se obtienen los siguientes valores:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad MN = |y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3.° *Angulo formado por la tangente y el radio-vector en el punto de contacto.* Si $r = f(\varphi)$ es la ecuación de la curva en un sistema polar de

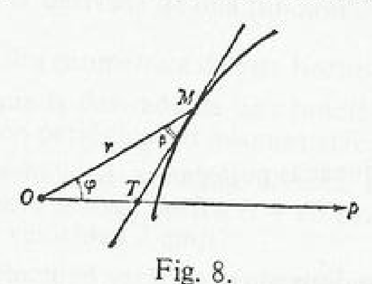


Fig. 8.

coordenadas y β es el ángulo formado por la tangente MT y el radio-vector OM en el punto de contacto M (fig. 8), se tiene

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}.$$

Problemas:

1055. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

en los puntos: a) $A\ (-1, 0)$; b) $B\ (2, 3)$; c) $C\ (3, 0)$.

1056. ¿En qué puntos de la curva

$$y = 2 + x - x^2$$

la tangente a la misma: a) es paralela al eje Ox; b) es paralela a la bisectriz del primer ángulo coordenado?

1057. Demostrar que la parábola

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (a \neq 0,\ x_1 < x_2)$$

corta al eje Ox bajo unos ángulos α y $\beta\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, que son iguales entre sí.

1058. Determinar en la curva

$$y = 2\sin x \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

aquellos trozos en que la pendiente de la curva (o sea, $|y'|$) es superior a 1.

1059. Las funciones

$$y = x \quad \text{e} \quad y_1 = x + 0{,}01 \sin 1\,000\pi x$$

se diferencian entre sí no más de 0,01. ¿Qué se puede decir respecto del valor máximo de la diferencia de las derivadas de estas funciones? Construir las gráficas correspondientes.

1060. ¿Bajo qué ángulo corta la curva

$$y = \ln x$$

el eje Ox?

1061. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad x = y^2?$$

1062. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$y = \sin x \quad \text{e} \quad y = \cos x?$$

1063. ¿Cómo debe de elegirse el parámetro n para que la curva

$$y = \operatorname{arc\,tg} nx \qquad (n > 0)$$

corte al eje Ox bajo un ángulo mayor que 89°?

1063.1. Comprobar que la curva

$$y = |x|^\alpha,$$

a) si $0 < \alpha < 1$ es tangente al eje Oy;
b) si $1 < \alpha < +\infty$ es tangente al eje Ox.

1063.2. Comprobar que la curva

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{si} \quad x \neq 0; \\ 1, & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

es tangente al eje Oy en el punto $A\ (0, 1)$.

1064. Determinar el ángulo formado por las tangentes a la izquierda y a la derecha a la curva: a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ en el punto $x = 0$; b) $y = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$ en el punto $x = 1$.

1065. Comprobar que la tangente a la espiral logarítmica

$$r = ae^{m\varphi}$$

(a y m son constantes) forma un ángulo constante con el radio-vector en el punto de contacto.

1066. Determinar la longitud de la subtangente a la curva

$$y = ax^n,$$

e indicar después un método de construcción de la tangente a esta curva.

1067. Demostrar que para la parábola

$$y^2 = 2px$$

a) la subtangente es igual al doble de la abscisa en el punto de contacto; b) la subnormal es constante. Indicar un método de construcción de la tangente a la parábola.

1068. Demostrar que la curva exponencial

$$y = a^x \qquad (a > 0)$$

tiene subtangente constante. Indicar un método de construcción de la tangente a la curva exponencial.

1069. Determinar la longitud de la normal a la catenaria

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

en cualquiera de sus puntos $M(x_0, y_0)$.

1070. Demostrar que, para la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a > 0)$$

la longitud del segmento de la tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, es una cantidad constante.

1071. ¿Qué relación tiene que haber entre los coeficientes a, b y c, para que la parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

sea tangente al eje Ox?

1072. ¿Cuál es la condición, para que la parábola cúbica

$$y = x^3 + px + q$$

sea tangente al eje Ox?

1073. ¿Para qué valor del parámetro a, la parábola

$$y = ax^2$$

es tangente a la curva $y = \ln x$?

1074. Demostrar que las curvas

$$y = f(x) \qquad (f(x) > 0)$$

e

$$y = f(x) \sin ax,$$

donde $f(x)$ es una función derivable, son tangentes entre sí en los puntos comunes.

1075. Comprobar que las familias de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = a$$

y

$$xy = b$$

forman una red ortogonal, es decir, estas curvas se cortan bajo ángulos rectos.

1076. Demostrar que las familias de parábolas

$$y^2 = 4a(a - x) \qquad (a > 0)$$

y

$$y^2 = 4b(b + x) \qquad (b > 0)$$

forman una red ortogonal.

1077. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

en los puntos: a) $t = 0$; b) $t = 1$.

1078. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

en los puntos: a) $t = 0$, b) $t = 1$, c) $t = \infty$.

1079. Escribir la ecuación de la tangente a la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario $t = t_0$. Indicar un método de construcción de la tangente a la cicloide.

1080. Demostrar que, para la tractriz

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \sin t \qquad (a > 0,\ 0 < t < \pi)$$

el segmento tangente es de longitud constante.

Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal en los puntos dados a las siguientes curvas:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6;\ 6{,}4).$

1082. $xy + \ln y = 1, \quad M(1;\ 1).$

§ 4. Diferencial de una función

1.° *Diferencial de una función.* Si el incremento de una función $y = f(x)$, de la variable independiente x, puede expresarse en la forma

$$\Delta y = A(x)\,dx + o(dx),$$

donde $dx = \Delta x$, entonces, la parte lineal de este incremento se llama diferencial de la función y:

$$dy = A(x)\,dx.$$

Para la existencia de la diferencial de una función $y = f(x)$ es necesario y suficiente que exista derivada finita $y' = f'(x)$, verificándose la igualdad:

$$dy = y'\,dx. \tag{1}$$

La fórmula (1) conserva su validez también en el caso en que la variable x es una función de una nueva variable independiente (propiedad de invariabilidad de la diferencial primera).

2.° *Acotación de pequeños incrementos de una función.* Para calcular pequeños incrementos de una función diferenciable $f(x)$ puede aplicarse la fórmula

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

cuyo error relativo es arbitrariamente pequeño para valores suficientemente pequeños de $|\Delta x|$, si $f'(x) \neq 0$.

En particular, si la variable independiente x se determina con un error absoluto límite $|\Delta_x|$, entonces Δ_y y δ_y, que representan los errores absoluto y relativo de la función $y = f(x)$, se expresan aproximadamente por las fórmulas siguientes:

$$\Delta_y = |y'|\,\Delta_x$$

y

$$\delta_y = |[\ln|y|]'|\,\Delta_x = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta x.$$

Problemas:

1083. Para la función

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

calcular: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ y compararlos entre sí, en los casos: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$.

1084. La ecuación del movimiento viene dada por la fórmula

$$x = 5t^2,$$

donde t se mide en segundos y x en metros.

Para el instante $t = 2$ s, calcular Δx, que es el incremento del trayecto, y dx, que es la diferencial del trayecto, en los casos:

a) $\Delta t = 1$ s; b) $\Delta t = 0{,}1$ s; c) $\Delta t = 0{,}001$ s.

Hallar la diferencial de la función y, si:

1085. $y = \frac{1}{x}$.

1086. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

1087. $y = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$

1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|.$

1089. $y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

1090. Hallar:

a) $d(xe^x)$;

b) $d(\sin x - x\cos x)$;

c) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

d) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

e) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$;

f) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;

g) $d\ln(1 - x^2)$;

h) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$;

i) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Sean u, v, w funciones diferenciables de x. Hallar la diferencial de la función y, si:

1091. $y=uvw$.

1092. $y=\frac{u}{v^2}$.

1093. $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

1094. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

1095. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1096. Hallar: a) $\frac{d}{dx^2}(x^2-2x^6-x^9)$;

b) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; d) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; e) $\frac{d(\operatorname{arc}\sin x)}{d(\operatorname{arc}\cos x)}$.

1097. En un sector circular, $R = 100$ cm y el ángulo central $\alpha = 60°$. ¿Cuánto variará el área de este sector, si: a) se aumenta 1 cm su radio, R; b) se disminuye 30′ el ángulo α? Indicar la solución exacta y la solución aproximada.

1098. El período de oscilación del péndulo (en segundos) se determina por la fórmula

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde l es la longitud del péndulo en centímetros y $g = 981$ cm/s² es la aceleración de la fuerza de gravedad.

¿Cuánto se debe alterar la longitud de un péndulo $l = 20$ cm, para que el período T aumente 0,05 segundos?

Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, hallar aproximadamente los siguientes valores:

1099. $\sqrt[3]{1{,}02}$.

1100. $\sin 29°$.

1101. $\cos 151°$.

1102. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1{,}05$.

1103. $\lg 11$.

1104. Demostrar la fórmula de aproximación

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\qquad (a>0),$$

donde $|x|\ll a$ (la relación $A\ll B$ entre las cantidades positivas A y B denota que A es muy pequeño con respecto a B).

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{34}$; c) $\sqrt{120}$ y compararlos con los datos de una tabla.

1104.1. Demostrar la fórmula

$$\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-r\qquad (a>0,\ x>0),$$

donde

$$0<r<\frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. Demostrar la fórmula de aproximación

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\qquad (a>0),$$

donde $|x|\ll a$.

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente:

a) $\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{80}$; c) $\sqrt[7]{100}$; d) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. El lado de un cuadrado es $x = 2{,}4$ m ± 0,05 m. ¿Con qué errores absoluto y relativo límites se puede calcular el área de este cuadrado?

1107. ¿Con qué error relativo se admite medir el radio R de una bola, para que pueda determinarse su volumen con una exactitud de hasta el 1 %?

1108. Para determinar la aceleración de la fuerza de gravedad mediante las oscilaciones de un péndulo se utiliza la fórmula

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

donde l es la longitud del péndulo y T es el período total de las oscilaciones del mismo. ¿Cómo influirá en el valor de g el error relativo δ al medir: a) la longitud l; b) el período T?

1109. Determinar el error absoluto del logaritmo decimal del número x ($x > 0$), si el error relativo de este número es igual a δ.

1110. Demostrar que los ángulos obtenidos en una tabla logarítmica de tangentes se determinan con mayor exactitud que los obtenidos en una tabla logarítmica de senos que tenga el mismo número de cifras decimales.

§ 5. Derivadas y diferenciales de orden superior

1.° *Definiciones principales.* Las derivadas de órdenes superiores de una función $y=f(x)$ se definen sucesivamente por las relaciones (¡suponiendo que tienen sentido las operaciones correspondientes!):

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}'\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Si una función $f(x)$ admite derivada continua $f^{(n)}(x)$ en el intervalo (a, b), se escribe abreviadamente: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. En particular, si $f(x)$ admite derivadas continuas de cualquier orden en (a, b), se emplea la expresión: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Las diferenciales de órdenes superiores de una función $y = f(x)$ se definen sucesivamente por las fórmulas

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

donde se ha admitido que $d^1 y = dy = y' dx$.

Si x es la variable independiente, se hace:

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = 0.$$

En este caso se verifican las fórmulas:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{e} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2.° *Fórmulas fundamentales:*

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \qquad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

3.° *Fórmula de Leibniz.* Si las funciones $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ admiten derivadas de n-ésimo orden (son n veces derivables), se tiene:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

donde $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ y C_n^i es el número de combinaciones i-arias de n elementos.

Análogamente, para la diferencial $d^n(uv)$, resulta:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i} u\, d^i v,$$

donde se ha hecho $d^0 u = u$ y $d^0 v = v$.

Problemas:

Hallar y'', si:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x \ln x$.

1118. $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Hallar $y(0)$, $y'(0)$ e $y''(0)$, si:

$$y = e^{\sin x} \cos(\sin x).$$

Sean $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ funciones que admiten derivadas hasta de segundo orden. Hallar y'', si:

1121. $y = u^2$.

1122. $y = \ln \frac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

1124. $y = u^v \quad (u > 0)$.

Sea $f(x)$ una función que admite derivadas hasta de tercer orden. Hallar y'' e y''', si:

1125. $y = f(x^2)$.

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$.

1128. $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, donde $\varphi(x)$ es una función derivable una cantidad suficiente de veces. Hallar y'' e y'''.

1130. Hallar $d^2 y$ para la función

$$y = e^x$$

en dos casos: a) x es la variable independiente; b) x es un argumento intermedio.

Considerando a x como variable independiente, hallar $d^2 y$, si:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$.

1132. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1133. $y = x^x$.

Sean u y v funciones de variable x, dos veces derivables. Hallar $d^2 y$, si:

1134. $y = uv$.

1135. $y = \frac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m y n son constantes).

1137. $y = a^u$ $(a > 0)$.

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{v}$.

Hallar las derivadas y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} de la función $y = y(x)$ dada en forma paramétrica, si:

1140. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1141. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1143. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

1144. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

1145. Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable una cantidad suficiente de veces. Hallar las derivadas x', x'', x''', x^{IV} de la función inversa $x = f^{-1}(y)$, suponiendo que estas derivadas existen.

Hallar y'_x, y''_{x^2} e y'''_{x^3} de la función $y = y(x)$, dada en forma implícita:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. ¿A qué son iguales y', y'' e y''' en el punto $M(3, 4)$?

1147. $y^2 = 2px$.

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Hallar y'_x e y''_{x^2}, si:

1149. $y^2 + 2 \ln y = x^4$.

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = a e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$ $(a > 0)$.

1151. Sea $f(x)$ una función definida y diferenciable dos veces para $x \leqslant x_0$. ¿Cómo deben elegirse los coeficientes a, b y c para que la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leqslant x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

sea diferenciable dos veces?

1152. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es:

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento. ¿A qué son iguales la velocidad y la aceleración en el momento $t = 2$?

1153. El punto $M(x, y)$ se mueve uniformemente sobre una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, dando una vuelta en T segundos. Hallar la velocidad v y la aceleración j de la proyección del punto M sobre el eje Ox, si en el momento $t = 0$ el punto ocupaba la posición M_0 $(a, 0)$.

1154. Un punto material pesado $M(x, y)$ se ha lanzado en el plano vertical Oxy bajo un ángulo α respecto del plano del horizonte, con una velocidad inicial v_0. Formar la ecuación del movimiento (despreciando la resistencia del aire) y determinar la magnitud de la velocidad v y la aceleración j, así como la trayectoria del movimiento. ¿A qué son iguales la altura máxima del punto y el alcance?

1155. Las ecuaciones del movimiento de un punto son:

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$$

(ω es una constante).

Determinar la trayectoria del movimiento y la magnitud de la velocidad y de la aceleración.

Hallar las derivadas del orden indicado.

1156. $y = x(2x - 1)^2 (x + 3)^3$; hallar $y^{(6)}$ e $y^{(7)}$.

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; hallar y'''.

1158. $y = \sqrt{x}$; hallar $y^{(10)}$.

1159. $y = \frac{x^2}{1 - x}$; hallar $y^{(8)}$.

1160. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; hallar $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 e^{2x}$; hallar $y^{(20)}$.

1162. $y = \frac{e^x}{x}$; hallar $y^{(10)}$.

1163. $y = x \ln x$; hallar $y^{(5)}$.

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$; hallar $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2 \sin 2x$; hallar $y^{(50)}$.

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1 - 3x}}$; hallar y'''.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; hallar $y^{(10)}$.

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; hallar $y^{(100)}$.

1169. $y = e^x \cos x$; hallar y^{IV}.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; hallar $y^{(6)}$.

En los ejercicios que siguen, hallar las diferenciales del orden indicado, considerando a x como variable independiente.

1171. $y = x^5$; hallar d^5y.

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; hallar d^3y.

1173. $y = x \cos 2x$; hallar $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; hallar d^4y.

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; hallar d^3y.

En los ejercicios que siguen, hallar las diferenciales del orden indicado, si u es una función de x que es diferenciable una cantidad suficiente de veces.

1176. $y = u^2$; hallar $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; hallar d^4y.

1178. $y = \ln u$; hallar d^3y.

1179. Hallar d^2y, d^3y y d^4y para la función $y = f(x)$, considerando a x como función de cierta variable independiente.

1180. Expresar las derivadas y'' e y''' de la función $y = f(x)$ mediante las diferenciales sucesivas de las variables x e y, sin suponer que x sea variable independiente.

1181. Comprobar que la función

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

1182. Comprobar que la función

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y'' - y = 0.$$

1183. Comprobar que la función

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y λ_1, λ_2 son constantes, satisface a la ecuación

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. Comprobar que la función

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y n es una constante, satisface a la ecuación

$$x^2 y'' + (1 - 2n) x y' + (1 + n^2) y = 0.$$

1185. Comprobar que la función

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y^{IV} + y = 0.$$

1186. Demostrar que, si una función $f(x)$ admite derivada de n-ésimo orden, se tiene

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. Hallar $P^{(n)}(x)$, si

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Hallar $y^{(n)}$, si

1188. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

1189. $y = \frac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Indicación. Descomponer la función en fracciones simples.

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$.

1194. $y = \cos^2 x$.

1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$.

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x \cos ax$.

1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1205. $y = \frac{e^x}{x}$.

1206. $y = e^x \cos x$.

1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln \frac{a + bx}{a - bx}$.

1209. $y = e^{\alpha x}P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio.

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

Hallar $d^n y$, si:

1211. $y = x^n e^x$.

1212. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. Demostrar las igualdades:

$$1)\ [e^{ax}\sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\varphi)$$

y

$$2)\ [e^{ax}\cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi),$$

donde

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1214. Hallar $y^{(n)}$, si:

a) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$;
b) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

1215. Transformando la función $f(x) = \operatorname{sen}^{2p} x$, donde p es un número natural, en un polinomio trigonométrico, $f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$, hallar $f^{(n)}(x)$.

Indicación. Hacer $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, donde $t = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $\bar{t} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, y aplicar la fórmula de Moivre.

1216. Hallar $f^{(n)}(x)$, si:

a) $f(x) = \sin^{2p+1} x$;
b) $f(x) = \cos^{2p} x$;
c) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

donde p es un número entero positivo (véase el problema anterior).

Si

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

donde i es la unidad imaginaria y $f_1(x)$, $f_2(x)$ son funciones reales de la variable x, entonces, por definición, se toma

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

1217. Aplicando la identidad

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right),$$

demostrar que

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n + 1)\operatorname{arcctg} x].$$

Indicación. Aplicar la fórmula de Moivre.

1218. Hallar la derivada de n-ésimo orden de la función

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Hallar $f^{(n)}(0)$, si:

1219. a) $f(x) = \frac{1}{(1 - 2x)(1 + x)}$; b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x}}$.

1220. a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; c) $f(x) = \arcsin x$.

1221. a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. a) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$; b) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1223. Hallar $f^{(n)}(a)$, si

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

donde la función $\varphi(x)$ admite derivada continua de $(n - 1)$-ésimo orden en un entorno del punto a.

1224. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(n es un número natural) admite en el punto $x = 0$ derivadas hasta de n-ésimo orden inclusive y carece de derivada de $(n + 1)$-ésimo orden.

1225. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es infinitamente derivable en $x = 0$.

Construir la gráfica de esta función.

1226. Demostrar que los polinomios de Chebichev

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arc\cos x)\qquad(m=1,\ 2,\ \ldots)$$

satisfacen a la ecuación

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

1227. Demostrar que los polinomios de Legendre

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

satisfacen a la ecuación

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

Indicación. Derivar $m+1$ veces la igualdad $(x^2-1)\ u'=2mxu$, donde $u=(x^2-1)^m$.

1228. Los polinomios de Chebishev-Laguerre se definen por la fórmula

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Hallar la expresión explícita del polinomio $L_m(x)$.

Demostrar que $L_m(x)$ satisface a la ecuación

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL(x)=0.$$

Indicación. Aplicar la igualdad $xu'+(x-m)u=0$, donde $u=x^m e^{-x}$.

1229. Sean $y=f(u)$ y $u=\varphi(x)$, donde $f(u)$ y $\varphi(x)$ son funciones derivables n veces.

Demostrar que

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

donde los coeficientes $A_k(x)$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ n)$ no dependen de la función $f(u)$.

1230. Demostrar que para la n-ésima derivada de la función compuesta $y=f(x^2)$ se verifica la fórmula

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(2x)^nf^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\ldots$$

1231. Los polinomios de Chebishev-Hermite se definen por la fórmula

$$H_m(x)=(-1)^me^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Hallar la expresión explícita de los polinomios $H_m(x)$.

Demostrar que $H_m(x)$ satisface a la ecuación

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0.$$

Indicación. Aplicar la igualdad $u'+2xu=0$, donde $u=e^{-x^2}$

1232. Demostrar la igualdad

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

Indicación. Aplicar el método de ~~inducción~~ matemática.

1232.1. Demostrar la fórmula

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n\ln x)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\quad(x>0).$$

1232.2. Demostrar la fórmula

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x],$$

donde

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y

$$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Sea $\frac{d}{dx}=D$ la notación de la operación de derivación y sea

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k$$

un polinomio diferencial simbólico, donde $p_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ son ciertas funciones continuas de x.

Demostrar que

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

donde λ es constante.

1234. Demostrar que, si en la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

se hace

$$x = e^t,$$

donde t es una variable independiente, dicha ecuación toma la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y = 0,$$

donde $D = \frac{d}{dt}$.

§ 6. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy

1.° *Teorema de Rolle.* Si: 1) la función $f(x)$ está definida y es continua en el segmento $[a, b]$; 2) $f(x)$ tiene derivada finita $f'(x)$ en el interior de este segmento; 3) $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c, perteneciente al intervalo (a, b), tal que

$$f'(c) = 0.$$

2.° *Teorema de Lagrange.* Si: 1) la función $f(x)$ está definida y es continua en el segmento $[a, b]$; 2) $f(x)$ tiene derivada finita $f'(x)$ en el intervalo (a, b), entonces

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ donde } a < c < b$$

(fórmula de los incrementos finitos).

3.° *Teorema de Cauchy.* Si: 1) las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son continuas en el segmento [a, b]; 2) $f(x)$ y $g(x)$ tienen derivadas finitas $f'(x)$ y $g'(x)$ en el intervalo (a, b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ para $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, entonces

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ donde } a < c < b.$$

Problemas:

1235. Comprobar que se verifica el teorema de Rolle para la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. La función

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

se anula para $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Explicar con el teorema de Rolle la contradicción aparente.

1237. Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada finita $f'(x)$ en cada punto del intervalo finito o infinito (a, b) y que

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Demostrar que

$$f'(c) = 0,$$

donde c es un punto del intervalo (a, b).

1238. Supongamos que: 1) la función $f(x)$ está definida y tiene derivada continua de $(n-1)$-ésimo orden $f^{(n-1)}(x)$ en el segmento $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ tiene derivada de n-ésimo orden $f^{(n)}(x)$ en el intervalo (x_0, x_n) y 3) se verifican las igualdades

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \qquad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Demostrar que en el intervalo (x_0, x_n) existe al menos un punto ξ tal que

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. Supongamos que: 1) la función $f(x)$ está definida y tiene derivada continua de $(p+q)$-ésimo orden $f^{(p+q)}(x)$ en el segmento $[a, b]$; 2) $f(x)$ tiene derivada de $(p+q+1)$-ésimo orden $f^{(p+q+1)}(x)$ en el intervalo (a, b); 3) se verifican las igualdades

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

y

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Demostrar que, entonces,

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

donde c es un punto del intervalo (a, b).

1240. Demostrar que, si todas las raíces del polinomio

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

de coeficientes reales a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, son reales, entonces, sus derivadas sucesivas $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, ..., $P_n^{(n-1)}(x)$ también tienen solamente raíces reales.

1241. Demostrar que el polinomio de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

tiene todas las raíces reales y están comprendidas en el intervalo $(-1, 1)$.

1242. Demostrar que el polinomio de Chebishev-Laguerre

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

tiene todas las raíces positivas.

1243. Demostrar que el polinomio de Chebishev-Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

tiene todas las raíces reales.

1244. Hallar en la curva $y = x^3$ un punto, en el cual la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$.

1245. ¿Es válida la fórmula de los incrementos finitos para la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en el segmento $[a, b]$, si $ab < 0$?

1246. Hallar la función $\theta = \theta(x, \Delta x)$ tal que

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x) \qquad (0 < \theta < 1),$$

si:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$;

b) $f(x) = x^3$; d) $f(x) = e^x$.

1246.1. Supongamos que $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ y que para cualesquiera x y h se verifica la identidad

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

Demostrar que

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son constantes.

1246.2. Supongamos que $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ y que para cualesquiera x y h se verifica la identidad

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Demostrar que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b, c son constantes.

1247. Demostrar que, si $x \geqslant 0$, se tiene

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

donde

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2},$$

siendo

$$\lim_{x \to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

1248. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Determinar el valor intermedio c de la fórmula de los incrementos finitos para la función $f(x)$ en el segmento $[0, 2]$.

1249. Sea $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, donde $0 < \xi(x) < x$. Demostrar que, si

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0,$$

entonces la función $\xi = \xi(x)$ es discontinua en cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $(0, \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$.

1250. Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada continua $f'(x)$ en el intervalo (a, b). ¿Es posible indicar, para cualquier punto ξ

de (a, b), dos puntos x_1 y x_2 de este intervalo, de modo que sea

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2)?$$

Examinar el ejemplo: $f(x)=x^3$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, donde $\xi=0$.

1251. Demostrar las desigualdades:

a) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

b) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$, si $0<y<x$ y $p>1$;

c) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqslant|a-b|$;

d) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$, si $0<b<a$.

1252. Explicar por qué no es válida la fórmula de Cauchy para las funciones

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3$$

en el segmento $[-1, 1]$.

1253. Sea $f(x)$ derivable en el segmento $[x_1, x_2]$, siendo $x_1x_2>0$. Demostrar que

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

donde $x_1<\xi<x_2$.

1254. Demostrar que, si la función $f(x)$ es derivable pero no está acotada en un intervalo finito (a, b), entonces su derivada $f'(x)$ tampoco está acotada en el intervalo (a, b). El teorema recíproco no es válido (construir un ejemplo).

1255. Demostrar que, si la función $f(x)$ tiene derivada acotada $f'(x)$ en un intervalo finito o infinito (a, b), entonces $f(x)$ es uniformemente continua en (a, b).

1256. Demostrar que, si la función $f(x)$ es derivable en un intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

o sea, $f(x)=o(x)$ cuando $x\longrightarrow+\infty$.

1257. Demostrar que, si la función $f(x)$ es derivable en un intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$f(x)=o(x) \quad \text{cuando} \quad x\to+\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

En particular, si existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=k$, entonces $k=0$.

1258. a) Demostrar que, si: 1) la función $f(x)$ está definida y es continua en el segmento $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ tiene derivada finita $f'(x)$ en el intervalo (x_0, X); 3) existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0+0),$$

entonces existe la derivada lateral $f'_+(x_0)$, finita o infinita, respectivamente, y

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

b) Comprobar que, para la función

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x\neq 1) \quad \text{y} \quad f(1)=0$$

existe el límite finito

$$\lim_{x\to 1} f'(x),$$

a pesar de que la función $f(x)$ no tiene derivadas laterales $f'_-(1)$ y $f'_+(1)$.

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

1159. Demostrar que, si $f'(x)=0$ cuando $a<x<b$, entonces

$$f(x)=\text{const} \quad \text{para} \quad a<x<b.$$

1260. Demostrar que la única función $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ que tiene derivada constante

$$f'(x)=k,$$

es la función lineal

$$f(x)=kx+b.$$

1261. ¿Qué se puede afirmar respecto de la función $f(x)$, si $f^{(n)}(x)=0$?

1261.1. Supongamos que $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ y que para cualquier x existe un número natural n_x $(n_x \leqslant n)$ tal que

$$f^{(n_x)}(x)=0.$$

Demostrar que la función $f(x)$ es un polinomio.

1262. Demostrar que la única función $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ que satisface a la ecuación

$$y'=\lambda y \qquad (\lambda=\text{const}),$$

es la función exponencial

$$y=Ce^{\lambda x},$$

donde C es una constante arbitraria.

Indicación. Examinar $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Comprobar que las funciones

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$$

y

$$g(x)=\operatorname{arc\,tg} x$$

tienen derivadas iguales en las regiones:

$$1)\ x<1 \quad \text{y} \quad 2)\ x>1.$$

Deducir la dependencia entre estas funciones.

1264. Demostrar las identidades:

a) $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x$ si $|x|\geqslant 1$;

b) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ si $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

1265. Demostrar que, si: 1) la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$; 2) tiene derivada finita $f'(x)$ en el interior del mismo; 3) no es lineal, entonces en el intervalo (a, b) existe al menos un punto c tal, que

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

1266. Demostrar que si: 1) la función $f(x)$ tiene derivada segunda $f''(x)$ en el segmento $[a, b]$ y 2) $f'(a)=f'(b)=0$, entonces en el intervalo (a, b) existe al menos un punto c tal que

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

1267. Un automóvil, que había comenzado su movimiento en un punto inicial, terminó su camino en t segundos, habiendo recorrido s metros. Demostrar que, en algún instante, el valor absoluto de la aceleración del movimiento del automóvil no era menor que

$$\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}.$$

§ 7. Crecimiento y decrecimiento de una función Desigualdades

1.° *Crecimiento y decrecimiento de una función.* Una función $f(x)$ se llama creciente (decreciente) en el segmento $[a, b]$, si

$$f(x_2)>f(x_1) \text{ para } a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$$

(o $f(x_2)<f(x_1)$ para $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, respectivamente).

Si una función derivable $f(x)$ es creciente (decreciente) en el segmento $[a, b]$, entonces

$$f'(x)\geqslant 0 \text{ para } a\leqslant x\leqslant b \text{ (o } f'(x)\leqslant 0 \text{ para } a\leqslant x\leqslant b).$$

2.° *Criterio suficiente de crecimiento (decrecimiento) de una función.* Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y en el interior del mismo tiene derivada positiva (negativa) $f'(x)$, entonces la función $f(x)$ es creciente (decreciente) en $[a, b]$.

Problemas:

Determinar los intervalos de monotonía en sentido estricto (de crecimiento o decrecimiento) de las siguientes funciones:

1268. $y=2+x-x^2$.

1269. $y=3x-x^3$.

1270. $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

1271. $y=\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geqslant 0)$.

1272. $y=x+\sin x$.

1273. $y=x+|\sin 2x|$.

1274. $y=\cos\frac{\pi}{x}$

1275. $y=\frac{x^2}{2^x}$.

1276. $y=x^n e^{-x}$ $(n>0,\ x\geqslant 0)$.

1277. $y=x^2-\ln x^2$.

1278. $f(x)=x\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sin\ln x\right)$, si $x>0$ y $f(0)=0$.

1279. Demostrar que, al aumentar el número de lados n, crece el
erímetro p_n del polígono regular de n lados inscrito en la circunferen-
ia y decrece el perímetro P_n del polígono regular de n lados circunscri-
o en la misma circunferencia. Aplicando esto, demostrar que p_n y P_n
ienen un límite común cuando $n\longrightarrow\infty$.

1280. Demostrar que la función

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

s creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(0,+\infty)$.

1281. Demostrar que una función racional entera

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \qquad (n\geqslant 1,\ a_n\neq 0)$$

monótona (en sentido estricto) en los intervalos $(-\infty,\ x_0)$ y
$_0, +\infty)$, donde x_0 es un número positivo suficientemente grande.

1282. Demostrar que una función racional

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m} \qquad (a_nb_m\neq 0),$$

no es idénticamente constante, es monótona (en sentido estricto)
los intervalos $(-\infty,-x_0)$ y $(x_0,+\infty)$, donde x_0 es un número
itivo suficientemente grande.

283. ¿Es obligatoriamente monótona la derivada de una función
nótona? Examinar el ejemplo: $f(x)=x+\operatorname{sen}x$.

284. Demostrar que, si $\varphi(x)$ es una función monótona creciente y
vable y

$$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x) \quad \text{para } x\geqslant x_0,$$

nces

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0) \quad \text{para } x\geqslant x_0,$$

ar una interpretación geométrica de esto.

1285. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $a\leqslant x<+\infty$ y que, además, $f'(x)>k>0$ para $x>a$, donde k es una constante.

Demostrar que, si $f(a)<0$, la ecuación $f(x)=0$ tiene una raíz real, y sólo una, en el intervalo

$$\left(a,\ a-\frac{f(a)}{k}\right).$$

1286. Una función $f(x)$ se llama creciente en el punto x_0 si en un entorno $|x-x_0|<\delta$ el signo del incremento de la función $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ coincide con el signo del incremento del argumento $\Delta x_0=x-x_0$.

Demostrar que, si $f(x)$ $(a<x<b)$ es creciente en cada punto del intervalo finito o infinito (a, b), entonces también es creciente en este intervalo.

1287. Comprobar que la función

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{2}{x}, \qquad \text{si } x\neq 0 \text{ y } f(0)=0,$$

es creciente en el punto $x=0$, pero no es creciente en ningún intervalo $(-\epsilon,\epsilon)$ que encierre este punto, donde $\epsilon>0$ es arbitrariamente pequeño.

Construir el diseño de la gráfica de esta función.

1288. Demostrar el teorema: si 1) las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son n veces derivables; 2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ n-1)$; $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ para $x>x_0$, entonces se verifica la desigualdad

$$\varphi(x)>\psi(x) \quad \text{para } x>x_0.$$

1289. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $e^x>1+x$ si $x\neq 0$;

b) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ si $x>0$;

c) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ si $x>0$;

d) $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$ si $0<x<\frac{\pi}{2}$;

e) $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ si $x>0$, $y>0$ y $0<\alpha<\beta$.

Dar una interpretación geométrica a las desigualdades a) – e).

1290. Demostrar la desigualdad

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Demostrar que para $x > 0$, se verifican las desigualdades

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. El número de términos y los términos de los extremos de una progresión aritmética y de una progresión geométrica son respectivamente iguales, y todos los términos de las progresiones son positivos. Demostrar que, para la progresión aritmética la suma de los términos es mayor que para la progresión geométrica.

1293. Valiéndose de la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

donde x, a_k, b_k $(k = 1, \dots, n)$ son reales, demostrar la desigualdad de Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. Demostrar que la media aritmética de unos números positivos no es superior a la media cuadrática de los mismos números, es decir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. Demostrar que la media geométrica de unos números positivos no es superior a la media aritmética de los mismos números, es decir,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Indicación. Aplicar el método de inducción matemática.

1296. Se llama media de orden s de dos números positivos a y b, a la función determinada por la igualdad

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \text{si} \quad s \neq 0,$$

y

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a, b).$$

En particular, se obtiene:
Para $s = -1$, la media armónica; para $s = 0$, la media geométrica (¡demostrarlo!); para $s = 1$, la media aritmética; para $s = 2$, la media cuadrática.

Demostrar que:

1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

2) la función $\Delta_s(a, b)$ para $a \neq b$ es una función creciente de s;

3) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Indicación. Examinar

$$\frac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a, b)].$$

1297. Demostrar las desigualdades:

a) $x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1)$ si $\alpha \geq 2$, $x > 1$;

b) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x - a}$,

si $n > 1$, $x > a > 0$;

c) $1 + 2\ln x \leq x^2$ si $x > 0$.

§ 8. Sentido de la concavidad. Puntos de inflexión

1.° *Condiciones suficientes de concavidad.* Se dice que la gráfica de una función derivable $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba (cóncava hacia abajo) en el segmento $[a, b]$, si el segmento de la curva

$$y = f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

está situado por encima (por debajo, respectivamente) de la tangente trazada en cualquier punto de este segmento. La condición suficiente para que la gráfica sea cóncava hacia arriba (hacia abajo), suponiendo que existe la derivada segunda $f''(x)$, es que se verifique la desigualdad

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \text{ para } a < x < b.$$

2.° *Condición suficiente para el punto de inflexión.* Los puntos en los cuales se cambia el sentido de la concavidad de la gráfica de la función, se llaman puntos de inflexión. Un punto x_0, tal que $f''(x_0)=0$, o bien no existe $f''(x_0)$, es un punto de inflexión si $f''(x)$ cambia su signo al pasar por el valor x_0.

Problemas:

1298. Averiguar el sentido de la concavidad de la curva

$$y=1+\sqrt[3]{x}$$

en los puntos $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ y $C(0, 0)$.

Hallar los intervalos de concavidad en un sentido determinado y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

1299. $y=3x^2-x^3$.

1300. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

1301. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

1302. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1303. $y=x+\sin x$.

1304. $y=e^{-x^2}$.

1305. $y=\ln(1+x^2)$.

1306. $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$.

1307. $y=x^x$ $(x>0)$.

1308. Comprobar que la curva

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

tiene tres puntos de inflexión situados en una recta.

Construir la gráfica de esta función.

1309. ¿Cómo debe elegirse el parámetro h de la "curva de probabilidades"

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \quad (h>0)$$

para que ésta tenga los puntos de inflexión $x=\pm\sigma$?

1310. Averiguar el sentido de la concavidad de la cicloide

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (a>0).$$

1311. Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en el intervalo $a\leqslant x<+\infty$, y que: 1) $f(a)=A>0$; 2) $f'(a)<0$; 3) $f''(x)\leqslant 0$ para $x>a$.

Demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene una raíz real, y sólo una, en el intervalo $(a, +\infty)$.

1312. Se dice que una función $f(x)$ es convexa por abajo (por arriba) en el intervalo (a, b) si, para cualesquiera puntos x_1 y x_2 de este intervalo y para cualesquiera números λ_1 y λ_2 $(\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_2=1)$, se verifica la desigualdad

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

(o la desigualdad inversa

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)).$$

respectivamente).

Demostrar que: 1) la función $f(x)$ es convexa por abajo en (a, b), si $f''(x)>0$ para $a<x<b$; 2) $f(x)$ es convexa por arriba en (a, b), si $f''(x)<0$ para $a<x<b$.

1313. Comprobar que las funciones

$$x^n \quad (n>1), \quad e^x, \quad x\ln x$$

son convexas por abajo en el intervalo $(0, +\infty)$, mientras que las funciones

$$x^n \quad (0<n<1), \quad \ln x$$

son convexas por arriba en el intervalo $(0, +\infty)$.

1314. Demostrar las desigualdades y establecer su significado geométrico:

a) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$;

b) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

c) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, si $x>0$ y $y>0$.

1314.1. Sea $f''(x)\geqslant 0$ para $a\leqslant x\leqslant b$.
Demostrar que

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

para cualesquiera $x_1, x_2\in[a, b]$.

1315. Demostrar que una función convexa acotada es siempre continua y tiene derivadas laterales a la izquierda y a la derecha.

1316. Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en el intervalo (a, b) y tal que $f''(\xi) \neq 0$, donde $a < \xi < b$.

Demostrar que en el intervalo (a, b) hay dos valores x_1 y x_2, tales que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Demostrar que si una función $f(x)$ es dos veces derivable en el intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

entonces en el intervalo $(x_0, +\infty)$ hay al menos un punto ξ tal que $f''(\xi) = 0$.

§ 9. Cálculo de límites indeterminados

1.er *caso de la regla de L'Hôpital* (cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$).

Si: 1) las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son continuas en un entorno U_ε *) del punto a, donde a es un número o es el símbolo ∞; y cuando $x \longrightarrow a$ ambas tienden a cero:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0;$$

2) existen las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en un entorno U_ε del punto a, a excepción, posiblemente, del mismo punto a, y éstas no se anulan simultáneamente para $x \neq a$; 3) existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces, se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*) Por entorno U_ε del punto a se entiende el conjunto de números x que cumplen la desigualdad: 1) $|x - a| < \varepsilon$, si a es un número, y 2) $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, si a es el símbolo ∞.

2.° *caso de la regla de L'Hôpital* (cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$).

Si: 1) las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas hacia el infinito cuando $x \longrightarrow a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

donde a es un número o es el símbolo ∞;

2) existen las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ para todos los x pertenecientes a un entorno U_ε del punto a y distintos de a, siendo

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \quad \text{para } x \in U_\varepsilon \text{ y } x \neq a;$$

3) existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para los límites laterales son válidas unas reglas semejantes.

El cálculo de los límites indeterminados de las formas $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, etc., se reduce al cálculo de los límites indeterminados de los dos tipos principales

$$\frac{0}{0} \text{ y } \frac{\infty}{\infty}.$$

mediante transformaciones algebraicas y logaritmación.

Problemas:

Calcular los valores de las siguientes expresiones:

1318. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

1319. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

1321. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

1323. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$.

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{th}\,x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arsh}(\mathrm{sh}\,x)-\mathrm{Arsh}(\sin x)}{\mathrm{sh}\,x-\sin x}$,

donde $\mathrm{Arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0,01x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x$ $(\varepsilon>0)$.

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x}-1)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

1346. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^{\sin x}$.

1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,a}\right)^{\mathrm{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,x\right)^x$.

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}\,x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arsh}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

donde $\mathrm{Arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1365. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

1366. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1367. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}\,x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}\,x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}\,x}$.

1368.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

1371. Hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x},$$

si la curva $y=f(x)$ se introduce en el origen de coordenadas $(0,\ 0)$ cuando $x\longrightarrow 0$ ($\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$) bajo un ángulo α.

1372. Demostrar que

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1,$$

si la curva continua $y=f(x)$ se introduce en el origen de coordenadas cuando $x\longrightarrow+0$ ($\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$) y para $0<x<\epsilon$ se mantiene íntegramente en el interior del ángulo agudo formado por las rectas: $y=-kx$ e $y=kx$ $(k\neq\infty)$.

1373. Demostrar que, si para la función $f(x)$ existe la derivada segunda $f''(x)$, entonces

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Averiguar si es derivable la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{si} \quad x\neq 0; \\ \dfrac{1}{2}\;, & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

en el punto $x=0$.

1373.2. Hallar la asíntota de la curva

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \qquad (x>0).$$

1374. Estudiar la posibilidad de la aplicación de la regla de L'Hôpital en los siguientes ejercicios:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Hallar el límite de la razón del área de un segmento circular de cuerda b y sagita h, al área del triángulo isósceles inscrito en este segmento, si el arco del segmento tiende a cero manteniéndose constante el radio R. Aplicando el resultado obtenido, deducir la fórmula aproximada para el área del segmento:

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

§ 10. Fórmula de Taylor

1.° *Fórmula local de Taylor.* Si: 1) la función $f(x)$ está definida en un entorno $|x-x_0|<\varepsilon$ del punto x_0; 2) $f(x)$ tiene en este entorno derivadas $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ hasta el orden $(n-1)$ inclusive; 3) en el punto x_0 existe la derivada de n-ésimo orden $f^{(n)}(x_0)$, entonces

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n, \tag{1}$$

donde

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

En particular, para $x_0=0$, se tiene:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n). \tag{2}$$

En las condiciones indicadas, la representación (1) es única.

Si en el punto x_0 existe la derivada $f^{(n+1)}(x_0)$, el término complementario en la fórmula (1) se puede tomar en la forma $O((x-x_0)^{n+1})$.

De la fórmula local de Taylor (2) se obtienen los siguientes cinco desarrollos importantes:

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$.

III. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$.

IV. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$

$\qquad\ldots+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

V. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2.° *Fórmula de Taylor.* Si: 1) la función $f(x)$ está definida en el segmento $[a, b]$; 2) $f(x)$ tiene en este segmento derivadas continuas $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$; 3) para $a<x<b$ existe la derivada finita $f^{(n)}(x)$, entonces

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

donde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(término complementario en forma de Lagrange), o

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \qquad (0<\theta_1<1)$$

(término complementario en forma de Cauchy).

Problemas:

1376. Desarrollar el polinomio

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$$

según las potencias enteras no negativas del binomio $x+1$.

Escribir los desarrollos en potencias enteras no negativas de la variable x hasta los términos del orden indicado inclusive para las siguientes funciones:

1377. $f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ hasta el término con x^4. ¿A qué es igual $f^{(4)}(0)$?

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ hasta el término con x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ hasta el término con x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ hasta el término con x^3.

1381. e^{2x-x^2} hasta el término con x^5.

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ hasta el término con x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ hasta el término con x^{13}.

1384. $\ln\cos x$ hasta el término con x^6.

1385. $\sin(\sin x)$ hasta el término con x^3.

1386. $\operatorname{tg} x$ hasta el término con x^5.

1387. $\ln\frac{\sin x}{x}$ hasta el término con x^6.

1388. Hallar tres términos del desarrollo de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en potencias enteras no negativas de la diferencia $x-1$.

1389. Desarrollar la función $f(x)=x^x-1$ en potencias enteras positivas del binomio $x-1$ hasta el término con $(x-1)^3$.

1390. Sustituir aproximadamente la función $y=a\,ch\frac{x}{a}\,(a>0)$ en un entorno del punto $x=0$ por una parábola de 2° orden.

1391. Desarrollar la función $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x\geqslant 0)$ en potencias enteras no negativas de la fracción $\frac{1}{x}$ hasta el término con $\frac{1}{x^3}$.

1392. Hallar el desarrollo de la función $f(h)=\ln(x+h)$ $(x>0)$ en potencias enteras no negativas del incremento h hasta el término con h^n (n es un número natural).

1393. Sea

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(0<\theta<1)$, y $f^{(n+1)}(x)\neq 0$.

Demostrar que

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

1393.1. Supongamos que, cuando $x\to 0$, se tiene

$$f(x)=1+kx+o(x).$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

1393.2. Supongamos que $f(x)\in C^{(2)}[0,1]$ y que $f(0)=f(1)=0$, siendo $|f''(x)|\leqslant A$ para $x\in(0,1)$. Demostrar que

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}\quad\text{para}\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

1393.3. Sea $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ una función dos veces derivable y

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\qquad(k=0,1,2).$$

Demostrar la desigualdad

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

1394. Acotar el error absoluto de las fórmulas de aproximación:

a) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ para $0\leqslant x\leqslant 1$;

b) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ para $|x|\leqslant\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}$ para $|x|\leqslant 0{,}1$;

d) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ para $0\leqslant x\leqslant 1$.

1395. ¿Para qué valores de x es válida la fórmula de aproximación

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2},$$

con una exactitud de 0,0001?

1395.1. Demostrar la fórmula

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r$$

$(n\geqslant 2,\ a>0,\ x>0)$, donde $0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

1396. Aplicando la fórmula de Taylor, calcular aproximadamente:

a) $\sqrt[3]{30}$; d) $\sqrt{e}$; g) $\operatorname{arc\,tg} 0{,}8$;
b) $\sqrt[5]{250}$; e) $\sin 18°$; h) $\operatorname{arc\,sin} 0{,}45$;
c) $\sqrt[12]{4000}$; f) $\ln 1{,}2$; i) $(1{,}1)^{1{,}2}$

y acotar el error.

1397. Calcular:

a) e con una exactitud de 10^{-9};
b) sen 1° con una exactitud de 10^{-8};
c) cos 9° con una exactitud de 10^{-5};
d) $\sqrt{5}$ con una exactitud de 10^{-4};
e) lg 11 con una exactitud de 10^{-5}.

Aplicando los desarrollos I – V, calcular los siguientes límites

1398. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

1399. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

1401. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

1402. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$. **1405.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

1404. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. **1406.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

1406.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

1406.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$.

Para el infinitésimo y cuando $x\longrightarrow 0$, determinar el término principal de la forma Cx^n (C es una constante), si:

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$. **1409.** $y=1-\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

1410. ¿Para qué valores de los coeficientes a y b,

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

es un infinitésimo de 5° orden con respecto a x?

1410.1. Elegir los coeficientes A y B de tal modo que para $x\longrightarrow 0$ se verifique la igualdad asintótica

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.2. ¿Para qué valores de los coeficientes A, B, C y D se verifica la fórmula asintótica

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5).$$

para $x\longrightarrow 0$?

1411. Considerando a $|x|$ pequeño, hallar fórmulas de aproximación sencillas para las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$; c) $\dfrac{A}{x}\left[1-\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{-n}\right]$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$; d) $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

1412. Considerando a x pequeño en valor absoluto, hallar una fórmula de aproximación de la forma

$$x=\alpha\sin x+\beta\operatorname{tg} x$$

con una exactitud hasta el término x^5.

Aplicar esta fórmula para la rectificación aproximada de arcos de una medida angular pequeña.

1413. Acotar el error relativo de la siguiente regla de Chebishev: un arco circular es aproximadamente igual a la suma de los lados laterales del triángulo isósceles construido sobre la cuerda de este arco y cuya altura es $\sqrt{\frac{4}{3}}$ de su sagita.

§ 11. Extremos de una función. Valores absolutos máximo y mínimo de una función

1.° *Condición necesaria para el extremo.* Se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un extremo (un máximo o un mínimo), si la función está definida en un entorno bilateral del punto x_0 y para todos los puntos x de una región $0<|x-x_0|<\delta$ se verifica la desigualdad

$$f(x)<f(x_0) \quad \text{o} \quad f(x)>f(x_0).$$

respectivamente.

En el punto de extremo, la derivada $f'(x_0)=0$, si ésta existe.

2.° *Condiciones suficientes de extremo. Primera regla.* Si 1) la función $f(x)$ está definida y es continua en un entorno $|x-x_0|<\delta$ del punto x_0, y $f'(x_0)=0$ o no existe (punto crítico); 2) $f(x)$ tiene derivada finita $f'(x)$ en la región $0<|x-x_0|<\delta$; 3) la derivada $f'(x)$ conserva un signo determinado a la izquierda del punto x_0 y a la derecha de x_0, entonces el comportamiento de la función $f(x)$ se caracteriza por la tabla siguiente:

	Signo de la derivada		Conclusión
	$x<x_0$	$x>x_0$	
I	+	+	no hay extremo
II	+	−	máximo
III	−	+	mínimo
IV	−	−	no hay extremo

Segunda regla. Si la función $f(x)$ tiene derivada segunda $f''(x)$ y en el punto x_0 se cumplen las condiciones

$$f'(x_0)=0 \text{ y } f''(x_0)\neq 0,$$

entonces en este punto de función tiene un extremo, a saber: un máximo si $f''(x_0)<0$, y un mínimo si $f''(x_0)>0$.

Tercera regla. Supongamos que la función $f(x)$ tiene en un intervalo $|x-x_0|<\delta$ las derivadas $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ y en el punto x_0, la derivada $f^{(n)}(x_0)$, siendo

$$f^{(k)}(x_0)=0 \ (k=1,\dots,n-1), \ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

En estas condiciones: 1) si n es un número par, la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto x_0, a saber: un máximo si $f^{(n)}(x_0)<0$, y un

mínimo si $f^{(n)}(x_0)>0$; 2) si n es un número impar, la función $f(x)$ no tiene extremo en el punto x_0.

3.° *Extremo absoluto.* Una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, alcanza el valor máximo absoluto (mínimo absoluto) en un punto crítico de esta función (o sea, en un punto en que la derivada $f'(x)$ es igual a cero o no existe) o en los puntos frontera a y b del segmento dado.

Problemas:

Averiguar los extremos de las siguientes funciones:

1414. $y=2+x-x^2$. **1415.** $y=(x-1)^3$.

1416. $y=(x-1)^4$.

1417. $y=x^m(1-x)^n$ (m y n son números enteros positivos)

1418. $y=\cos x+\operatorname{ch} x$. **1419.** $y=(x+1)^{10}e^{-x}$.

1420. $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n es un número natural).

1421. $y=|x|$. **1422.** $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. Averiguar si la función

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$$

(n es un número natural) tiene un extremo en el punto x_0, donde la función $\varphi(x)$ es continua en $x=x_0$ y $\varphi(x_0)\neq 0$.

1424. Sea $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x)=\frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$

y sea x_0 un punto estacionario de la función $f(x)$, es decir,

$$P_1(x_0)=0, \ Q(x_0)\neq 0,$$

Demostrar que

$$\operatorname{sgn} f''(x_0)=\operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. ¿Se puede afirmar que, si la función $f(x)$ tiene máximo en el punto x_0, entonces en un entorno suficientemente pequeño de este punto, a la izquierda del punto x_0 la función $f(x)$ es creciente, mientras que a la derecha del mismo es decreciente?

Examinar el ejemplo:

$$f(x)=2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), \quad \text{si} \quad x\neq 0 \text{ y } f(0)=2.$$

1426. Demostrar que la función

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \text{si} \quad x\neq 0, \text{ y } f(0)=0,$$

tiene un mínimo en el punto $x = 0$, y la función

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \text{si} \quad x \neq 0, \text{ y } g(0) = 0$$

no tiene extremo en el punto $x_0 = 0$, a pesar de que

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad g^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Construir las gráficas de estas funciones.

1427. Averiguar los extremos de las funciones:

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$;

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Construir las gráficas de estas funciones.

1428. Averiguar si la función

$$f(x) = |x|\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right), \quad \text{si} \quad x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

tiene extremo en el punto $x = 0$.

Construir la gráfica de esta función.

Hallar los extremos de las siguientes funciones:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

1430. $y = 2x^2 - x^4$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

1436. $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y = xe^{-x}$.

1438. $y = \sqrt{x}\ln x$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

1442. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y = e^x \sin x$.

1444. $y = |x| e^{-|x-1|}$.

Hallar los valores máximos y mínimos absolutos para las siguientes funciones:

1445. $f(x) = 2^x$ en el segmento $[-1; 5]$.

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ en el segmento $[-3; 10]$.

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ en el segmento $[-10; 10]$.

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en el segmento $[0{,}01; 100]$.

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el segmento $[-1; 1]$.

Hallar el ínfimo (inf) y el supremo (sup) para las siguientes funciones:

1450. $f(x) = xe^{-0{,}01x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

1451. $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

1452. $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

1453. $f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

1454. Calcular el ínfimo y el supremo de la función $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ en el intervalo $x < \xi < +\infty$.

Construir las gráficas de las funciones

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \quad \text{y} \quad m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1454.1. Sea

$$M_k = \sup_x |f^{(k)}(x)|, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Hallar M_0, M_1 y M_2, si $f(x) = e^{-x^2}$.

1455. Hallar el máximo término de la sucesión:

a) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

b) $\frac{\sqrt{n}}{n + 10\,000}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

c) $\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

1456. Demostrar las desigualdades:

a) $|3x - x^3| \leqslant 2$ si $|x| \leqslant 2$;

b) $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $p > 1$;

c) $x^m(a-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$ si $m > 0$, $n > 0$ y $0 \leqslant x \leqslant a$;

d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a$ $(x > 0,\ a > 0,\ n > 1)$;

e) $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

1456.1. Demostrar la desigualdad

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leqslant 2$$

para $-\infty < x < +\infty$.

1457. Hallar la "desviación a cero" del polinomio

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

en el segmento $[-2, 1]$, o sea, calcular

$$E_P = \sup_{-2 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|.$$

1458. ¿Para qué valor del coeficiente q el polinomio

$$P(x) = x^2 + q$$

es de desviación mínima a cero en el segmento $[-1, 1]$, o sea,

$$E_P = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = \min.$$

1459. Se llama desviación absoluta de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el segmento $[a, b]$ al número

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Hallar la desviación absoluta de las funciones:

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

en el segmento $[0, 1]$.

1460. Sustituir aproximadamente la función

$$f(x) = x^2$$

en el segmento $[x_1, x_2]$, por la función lineal

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

de tal modo que la desviación absoluta de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ (véase el problema anterior) sea mínima, y calcular esta desviación absoluta mínima.

1461. Determinar el mínimo de la función

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}.$$

Calcular el número de raíces reales de la ecuación y separar estas raíces, si:

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.
1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.
1465. $x^5 - 5x = a$.
1466. $\ln x = kx$.
1467. $e^x = ax^2$.
1468. $\sin^3 x \cdot \cos x = a$ si $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
1469. $\operatorname{ch} x = kx$.
1470. ¿Cuál es la condición para que la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

tenga: a) una raíz real; b) tres raíces reales. Representar las regiones correspondientes en el plano (p, q).

§ 12. Construcción de las gráficas de las funciones por sus puntos característicos

Para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ es necesario: 1) hallar el campo de existencia de esta función y averiguar el comportamiento de la misma en los puntos frontera; 2) establecer la simetría de la gráfica y la periodicidad; 3) hallar los puntos de discontinuidad de la función y los intervalos de continuidad; 4) determinar los ceros de la función y las regiones en las que el signo de ésta es constante; 5) hallar los puntos de extremo y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función; 6) hallar los puntos de inflexión y determinar los intervalos de concavidad de la gráfica en un sentido determinado; 7) hallar las asíntotas, en caso de existencia de las mismas; 8) señalar tales o cuales particularidades de la gráfica.

En los ejercicios señalados con un asterisco, los puntos de inflexión se determinan aproximadamente.

Problemas:

Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1471. $y = 3x - x^3$.
1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.
1473. $y = (x+1)(x-2)^2$.
1474*. $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.
1475*. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.
1476*. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.
1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.
1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.
1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.
1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.
1481. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1482*. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{10}{3x^2}+\frac{1}{1-x}$.

1484. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$.

1485.1. $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

1488. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

1491. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

1493. $y=\frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ $(a>0)$.

1495. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y=\sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$.

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$.

1499. $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

1501. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1502. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

1503. $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

1504.1. $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1505. $y=2x-\operatorname{tg} x$.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

1509.1. $y=e^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y=\frac{e^x}{1+x}$.

1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1515. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1516. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$.

1518. $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1520. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1522. $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$.

1525. $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

1526. $y=x^x$.

1527*. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

1528. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1529*. $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y=\frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (sin averiguar la concavidad).

Construir las curvas dadas en forma paramétrica:

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1533*. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

1536. $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$.

1538. $x=t\ln t$, $y=\frac{\ln t}{t}$.

1539. $x=\frac{a}{\cos^3 t}$, $y=a\operatorname{tg}^3 t$ $(a>0)$.

1540. $x=a(\operatorname{sh} t-t)$, $y=a(\operatorname{ch} t-1)$ $(a>0)$.

Expresando las ecuaciones de las curvas en forma paramétrica, construir estas curvas, si:

1541. $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

Indicación. Hacer $y=tx$.

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

1543. $x^2y^2=x^3-y^3$.

1544. $x^y=y^x$ $(x>0,\ y>0)$.

1545. Construir la gráfica de la curva

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{ch}^2 y=1.$$

Construir las gráficas de las funciones dadas en un sistema polar de coordenadas (φ, r) $(r\geqslant 0)$:

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leqslant b)$.

1547. $r=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$.

1548. $r=\frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a>0)$.

1549*. $r=a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}$, rﬂe $\varphi>1$ $(a>0)$.

1550*. $\varphi=\arccos\frac{r-1}{r^2}$.

Construir las gráficas de las familias de curvas (a es un parámetro variable):

1551. $y=x^2-2x+a$.

1552. $y=x+\frac{a^2}{x}$.

1553. $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$.

1554. $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

1555. $y=xe^{-\frac{x}{a}}$.

§ 13. Problemas de máximos y mínimos de las funciones

1556. Demostrar que, si la función $f(x)$ no es negativa, la función

$$F(x)=Cf^2(x) \qquad (C>0)$$

tiene exactamente los mismos puntos de extremo que la función $f(x)$.

1557. Demostrar que, si una función $\varphi(x)$ es monótona creciente en sentido estricto para $-\infty<x<+\infty$, entonces las funciones

$$f(x) \text{ y } \varphi(f(x))$$

tienen los mismos puntos de extremo.

1558. Hallar el valor máximo del producto de la m-ésima y n-ésima potencias ($m>0$, $n>0$) de dos números positivos, si la suma de éstos es constante e igual a a.

1559. Hallar el valor mínimo de la suma de la m-ésima y n-ésima potencias ($m>0$, $n>0$) de dos números positivos, si el producto de éstos es constante e igual a a.

1560. ¿En qué sistemas de logaritmos existen números que son iguales a su logaritmo?

1561. Entre todos los rectángulos de un área dada S, determinar aquél cuyo perímetro sea mínimo.

1562. Hallar el triángulo rectángulo de área máxima, si la suma de un cateto y la hipotenusa es constante.

1563. ¿Qué dimensiones lineales tiene que tener un bote cilíndrico cerrado de volumen V para que el área total de la superficie sea mínima?

1564. En un segmento circular dado, no superior al semicírculo, hay que inscribir un rectángulo de área máxima.

1565. En la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

hay que inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima.

1566. En un triángulo de base b y de altura h hay que inscribir un rectángulo de perímetro máximo.
Estudiar la posibilidad de resolución de este problema.

1567. De un tronco redondo, de diámetro d, hay que tallar una viga con una sección transversal rectangular de base b y altura h. ¿Qué dimensiones deberá tener la viga para que la resistencia sea máxima, si la resistencia es proporcional a bh^2?

1568. Inscribir en una semiesfera de radio R un paralepípedo rectangular con la base cuadrada de volumen máximo.

1569. Inscribir en una esfera de radio R un cilindro de volumen máximo.

1570. Inscribir en una esfera de radio R un cilindro cuya superficie total sea máxima.

1571. Circunscribir en torno a una esfera dada un cono de volumen mínimo.

1572. Hallar el volumen máximo de un cono con una generatriz dada l.

1573. En un cono circular recto de ángulo 2α en la sección axial y de radio de base R, hay que inscribir un cilindro cuya superficie total sea máxima.

1574. Hallar la distancia mínima del punto $M(p, p)$ a la parábola $y^2=2px$.

1575. Hallar las distancias mínima y máxima del punto $A(2, 0)$ a la circunferencia $x^2+y^2=1$.

1576. Hallar la cuerda máxima de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ que pasa por el vértice $B(0, -b)$.

1577. Trazar por el punto $M(x, y)$ de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ una tangente que forme con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

1578. Un cuerpo está formado por un cilindro circular recto que termina por encima por una semiesfera. ¿Qué dimensiones lineales debe tener este cuerpo para que el área de la superficie total sea mínima, si su volumen es igual a V?

1579. La sección transversal de un canal abierto tiene la forma de un trapecio isósceles. ¿Cuál debe ser la inclinación de los costados para que el "perímetro mojado" de la sección sea mínimo, si el área de la "sección viva" del agua en el canal es igual a S y el nivel del agua es igual a h?

1580. Se llama "sinuosidad" de un circuito cerrado que limita un área S, la razón del perímetro de este circuito a la longitud de la circunferencia que limita un círculo de la misma área S.

¿Qué forma debe tener el trapecio isósceles $ABCD$ ($AD \parallel BC$) de sinuosidad mínima, si la base $AD = 2a$ y el ángulo agudo $BAD = \alpha$?

1581. ¿Qué sector se debe recortar de un círculo de radio R, de modo que de la parte restante se pueda enrollar un embudo de capacidad máxima?

1582. Una fábrica A está a a km de la vía férrea que va del sur al norte y que pasa por la ciudad B, teniendo en cuenta la distancia mínima. ¿Bajo qué ángulo φ respecto de la vía férrea se debe construir una vía de acceso desde la fábrica para que el transporte del cargamento de A a B sea el más económico, si los gastos del transporte de una tonelada de cargamento a la distancia de 1 km son de p rublos por la vía de acceso y q rublos ($p > q$) por la vía férrea y la ciudad B está situada b km más al norte que la fábrica A?

1583. Dos barcos navegan con velocidades constantes u y v por líneas rectas que forman entre sí un ángulo θ. Hallar la distancia mínima entre los barcos, si en un momento dado sus distancias hasta el punto de intersección de sus rutas eran iguales a a y b, respectivamente.

1584. En los puntos A y B están situados unos focos luminosos de S_1 y S_2 bujías de intensidad. Hallar en el segmento $AB = a$ el punto menos iluminado.

1585. Un punto luminoso está situado en la línea de los centros de dos esferas que no se cortan de radios R y r ($R > r$) y se encuentra fuera de las esferas ¿Cuál debe ser la posición del punto para que la suma de las partes iluminadas de las superficies de las esferas sea máxima?

1586. ¿A qué altura sobre el centro de una mesa redonda de radio a se debe colocar una bombilla eléctrica para que la iluminación del borde sea máxima?

Indicación. La iluminación se expresa por la fórmula

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

donde φ es el ángulo de inclinación de los rayos, r es la distancia del foco luminoso a la superficie iluminada, k es la intensidad del foco luminoso.

1587. A un río de anchura de a m se le ha construído un canal de anchura de b m, que forma con el mismo un ángulo recto. ¿Cuál es la longitud máxima de los barcos que pueden navegar por este canal?

1588. Los gastos diarios en la navegación de un barco constan de dos partes: una constante, igual a a rublos y otra variable que crece

proporcionalmente al cubo de la velocidad ¿Cuál debe ser la velocidad v del barco para que la navegación sea la más económica?

1589. Se necesita mover una carga de peso P, situada en un plano horizontal áspero, mediante la aplicación de una fuerza. ¿Cuál debe ser la inclinación de esta fuerza respecto del horizonte para que su magnitud sea mínima, si el coeficiente de rozamiento de la carga es igual a k?

1590. En una taza que tiene la forma de una semiesfera de radio a se ha colocado una barra de longitud $l > 2a$. Hallar la posición de equilibrio de la barra.

§ 14. Contacto de curvas. Círculo osculador. Evoluta

1.° *Contacto de n-ésimo orden.* Se dice que las curvas

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad y = \psi(x)$$

tienen en el punto x_0 un contacto de n-ésimo orden (en sentido estricto), si $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) y $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$. En este caso, para $x \longrightarrow x_0$ se tiene:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*[x - x_0]^{n+1}.$$

2.° *Círculo osculador.* La circunferencia

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

que tiene con la curva dada $y = f(x)$ un contacto de orden no inferior al 2°, se llama círculo osculador en el punto correspondiente. El radio de este círculo

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

se llama radio de curvatura, y $k = \frac{1}{R}$, curvatura.

3.° *Evoluta.* El lugar geométrico de los centros (ξ, η) de los círculos osculadores (los centros de curvatura)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

se llama evoluta de la curva dada $y = f(x)$.

Problemas:

1591. Elegir los parámetros k y b de la recta

$$y = kx + b$$

de tal modo que ésta tenga con la curva

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

un contacto de orden superior al primero.

1592. ¿Para qué valores de los coeficientes a, b y c la parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

tiene en el punto $x = x_0$ un contacto de 2° orden con la curva $y = e^x$?

1593. ¿Qué orden de contacto con el eje Ox tienen en el punto $x = 0$ las curvas:

a) $y = 1 - \cos x$; b) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$; c) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Demostrar que la curva: $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ e $y = 0$ si $x = 0$, tiene un contacto con el eje Ox de orden infinito en el punto $x = 0$.

1595. Hallar el radio y el centro de curvatura de la hipérbola

$$xy = 1$$

en los puntos: a) $M(1, 1)$; b) $N(100; 0{,}01)$.

Hallar los radios de curvatura de las siguientes curvas:

1596. La parábola $y^2 = 2px$.

1597. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$.

1598. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1599. La astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1600. La elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1601. La cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1602. La evolvente del círculo $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.

1603. Demostrar que el radio de curvatura de una línea de 2° orden

$$y^2 = 2px - qx^2$$

es proporcional al cubo del segmento normal.

1604. Escribir la fórmula para el radio de curvatura de una curva dada en coordenadas polares.

Hallar los radios de curvatura de las curvas dadas en coordenadas polares (los parámetros son positivos):

1605. Espiral de Arquímedes $r = a\varphi$.

1606. Espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$.

1607. Cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1608. Lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1609. Hallar en la curva $y = \ln x$ el punto en el que la curvatura es máxima.

1610. La curvatura máxima de la parábola cúbica $y = \frac{kx^3}{6}$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, $k > 0)$ es igual a $\frac{1}{1000}$. Hallar el punto x en el que se alcanza esta curvatura máxima.

Hallar las ecuaciones de las siguientes curvas:

1611. Evoluta de la parábola $y^2 = 2px$.

1612. Evoluta de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1613. Evoluta de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1614. La evoluta de la tractriz $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

1615. La evoluta de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$.

1616. Demostrar que la evoluta de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

también es una cicloide, que se diferencia de la dada solamente por su posición.

§ 15. Resolución aproximada de ecuaciones

1.° *Regla de las partes proporcionales (método de las cuerdas).* Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y

$$f(a)\,f(b) < 0,$$

siendo $f'(x) \neq 0$ para $a < x < b$, la ecuación

$$f(x) = 0$$

tiene una raíz real en el intervalo (a, b) y sólo una. Por primera aproximación de esta raíz se puede tomar el valor

$$x_1 = a + \delta_1,$$

donde

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Aplicando luego este método a aquél de los intervalos (a, x_1) o (x_1, b) en cuyos extremos la función $f(x)$ tenga signos contrarios, se obtiene la segunda aproximación x_2 de la raíz ξ, etc. Para acotar la n-ésima aproximación x_n es válida la fórmula

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (2)$$

donde $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$, siendo

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

2.° *Regla de Newton (método de las tangentes).* Si $f''(x) \neq 0$ en el segmento $[a, b]$ y $f(a)\,f''(a) > 0$, entonces por primera aproximación ξ_1 de la raíz ξ de la ecuación (1) se puede tomar el valor

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Reiterando este proceso se obtienen las aproximaciones sucesivas ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ que convergen rápidamente hacia la raíz ξ y cuyas precisiones pueden acotarse, por ejemplo, por la fórmula (2).

Para obtener una orientación grosera, se puede dibujar un diseño de la gráfica de la función $y = f(x)$.

Problemas:

Aplicando el método de las partes proporcionales, calcular con exactitud hasta 0,001 las raíces de las siguientes ecuaciones:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$.

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1 \sin x = 2$.

1620. $\cos x = x^2$.

Aplicando el método de Newton, calcular con la exactitud indicada las raíces de las siguientes ecuaciones:

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (con exactitud hasta 10^{-3}).

1622. $x \lg x = 1$ (con exactitud hasta 10^{-4}).

1623. $\cos x \operatorname{ch} x = 1$ (con exactitud hasta 10^{-3}) (dos raíces positivas).

1624. $x + e^x = 0$ (con exactitud hasta 10^{-5}).

1625. $x \operatorname{th} x = 1$ (con exactitud hasta 10^{-6}).

1626. Hallar las tres primeras raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} x = x.$$

con exactitud hasta 0,001.

1627. Hallar dos raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

con exactitud hasta 10^{-3}.

Capítulo **3** INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. Integrales indefinidas elementales

1.° Concepto de integral indefinida. Si una función $f(x)$ está definida en el intervalo (a, b) y es continua y $F'(x)=f(x)$ para $a<x<b$, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a<x<b,$$

donde C es una constante arbitraria.

2.° Propiedades principales de la integral indefinida:

a) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$; b) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

c) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ $(A = \text{const};\ A \neq 0)$;

d) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3.° Tabla de las integrales elementales:

I. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

VII. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x\,dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

XIII. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4.° Métodos fundamentales de integración.

a) Método de introducción de un nuevo parámetro. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

donde $u = \varphi(x)$ es una función derivable.

b) Método de descomposición. Si

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

c) Método de sustitución. Si $f(x)$ es continua, entonces, haciendo

$$x = \varphi(t),$$

donde $\varphi(t)$ es una función continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ se tiene:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

d) Método de integración por partes. Si u y v son unas funciones diferenciables de x, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Aplicando la tabla de las integrales elementales, hallar las siguientes integrales:

1628. $\int (3 - x^2)^3\,dx.$

1629. $\int x^2 (5 - x)^4\,dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\,dx.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

1633. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1635. $\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x}\,dx.$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\,dx.$

1639. $\int \frac{x^2\,dx}{1 + x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2\,dx}{1 - x^2}.$

1641. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}\,dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}}\,dx.$

1644. $\int (2^x + 3^x)^2\,dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx.$

1646. $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}\,dx.$

1647. $\int (1 + \sin x + \cos x)\,dx.$

1648. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx, (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1651. $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)\,dx.$

1652. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1654. Demostrar que, si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \qquad (a \neq 0).$$

Hallar las integrales:

1655. $\int \frac{dx}{x + a}.$

1656. $\int (2x - 3)^{10}\,dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1 - 3x}\,dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}.$

1659. $\int \frac{dx}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}}.$

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1 - 2x + x^2}}{1 - x}\,dx.$

1661. $\int \frac{dx}{2 + 3x^2}.$

1662. $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}.$

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx.$

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5a)\,dx.$

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,dx.$

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}.$

1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}.$

Hallar las integrales que se dan a continuación, mediante una transformación adecuada de la expresión subintegral:

1674. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$

1676. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}.$

1677. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$

1678. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}.$

1679. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}.$

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

Indicación. $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x}).$

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$

1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

1689. $\int xe^{-x^2}\,dx.$

1690. $\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x}.$

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

1695. $\int \sin^3 x\cos x\,dx.$

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx.$

1697. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

1698. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx.$

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx.$

1700.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

1700.2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

1700.3. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx.$

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}\,dx.$

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}.$

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}.$

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx.$

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

Indicación.

$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x-\frac{1}{x}\right).$

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx.$

1714. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}.$

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

1717. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx.$

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx.$

1720. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$

Aplicando el método de descomposición, calcular las integrales:

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx.$

1721.1. $\int x(1-x)^{10}\,dx.$

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\,dx.$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\,dx.$

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx.$

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx.$

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx.$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx.$

Indicación.

$x=-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

1732. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

Indicación.

$1 = \frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)]$.

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

1738. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}\ (a \neq b)$.

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a^2 \neq b^2)$.

1741. $\int \sin^2 x\,dx$.

1742. $\int \cos^2 x\,dx$.

1743. $\int \sin x \sin(x+\alpha)\,dx$.

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\,dx$.

1745. $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\,dx$.

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

1747. $\int \sin^3 x\,dx$.

1748. $\int \cos^3 x\,dx$.

1749. $\int \sin^4 x\,dx$.

1750. $\int \cos^4 x\,dx$.

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

1753. $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,dx$.

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Indicación.

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$.

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx$.

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx$.

1763. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\,dx$.

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x\,dx$.

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

Aplicando sustituciones adecuadas, hallar las siguientes integrales:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx$.

1767. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$.

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx$.

1771. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\,dx$.

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

1774. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

Aplicando las sustituciones trigonométricas $x = a \operatorname{sen} t$, $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \operatorname{sen}^2 t$, etc., hallar las siguientes integrales (los parámetros son positivos):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1779. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Indicación. Aplicar la sustitución

$x - a = (b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$.

Aplicando las sustituciones hiperbólicas $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$, etc., hallar las siguientes integrales (los parámetros son positivos):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx.$

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx.$

Indicación. Hacer $x+a=(b-a)\,\mathrm{sh}^2 t.$

Aplicando el método de integración por partes, hallar las siguientes integrales:

1791. $\int \ln x\,dx.$

1792. $\int x^n \ln x\,dx \quad (n \neq -1).$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

1794. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx.$

1795. $\int xe^{-x}\,dx.$

1796. $\int x^2e^{-2x}\,dx.$

1797. $\int x^3e^{-x^2}\,dx.$

1798. $\int x\cos x\,dx.$

1799. $\int x^2\sin 2x\,dx.$

1800. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx.$

1801. $\int x^3\,\mathrm{ch}\,3x\,dx.$

1802. $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx.$

1803. $\int \arcsin x\,dx.$

1804. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

1805. $\int x^2\arccos x\,dx.$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

1807. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

1808. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

1809. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

1810. $\int \sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}\,x)\,dx.$

Hallar las integrales:

1811. $\int x^3e^{x^2}\,dx.$

1812. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

1813. $\int x\,(\mathrm{arctg}\,x)^2\,dx.$

1814. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$

1815. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1819. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx.$

1820. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

1821. $\int x\sin^2 x\,dx.$

1822. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1823. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx.$

1824. $\int \frac{xe^{\mathrm{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

1825. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

1826. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

1827. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

1828. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

1829. $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

1831. $\int (e^x-\cos x)^2\,dx.$

1832. $\int \frac{\mathrm{arcctg}\,e^x}{e^x}\,dx.$

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx.$

1834. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

El cálculo de las siguientes integrales está basado en la reducción del trinomio cuadrático a la forma canónica y en la aplicación de las fórmulas:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0).$

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C \quad (a>0).$

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C.$

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

Hallar las integrales:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab\neq 0).$

1837. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

1839. $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$

1840. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}\,dx.$

1841. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

1842. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+2}.$

1843. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$.

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}$ $(b \neq 0)$.

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

1848. $\int \frac{ax}{\sqrt{x + x^2}}$.

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$.

1850. Demostrar que, si

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0),$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \quad \text{si} \quad a > 0$$

y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C \quad \text{si} \quad a < 0.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$.

1852. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$.

1853. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}}$.

1853.1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}$.

1855. $\int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}}\,dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

1858. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x + 2)^2\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$.

1861. $\int \sqrt{2 + x - x^2}\,dx$.

1862. $\int \sqrt{2 + x + x^2}\,dx$.

1863. $\int \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}\,x\,dx$.

1864. $\int \frac{1 - x + x^2}{x\sqrt{1 + x - x^2}}\,dx$.

1865. $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}}\,dx$.

§ 2. Integración de funciones racionales

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, hallar las siguientes integrales:

1866. $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}\,dx$.

1867. $\int \frac{x\,dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10}\,dx}{x^2 + x - 2}$.

1869. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$.

1871. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 3x + 2}$.

1872. $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)}\,dx$.

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)^2 dx$.

1874. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3}$.

1875. $\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$.

1876. $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$.

1877. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$.

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$.

1880. $\int \frac{dx}{x(1 + x)(1 + x + x^2)}$.

1881. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

1882. $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1}$.

1883. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$.

1884. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

1885. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

1886. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$.

1887. $\int \frac{dx}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)}$.

1888. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$.

1889. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

1890. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x - 1)^2}\,dx$$

represente una función racional?

Aplicando el método de Ostrogradski, hallar las integrales:

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x - 1)^2(x + 1)^3}$.

1892. $\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}$.

1893. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.

1894. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

1895. $\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2}\,dx$.

1897. $\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2}$.

Separar la parte algebraica de las siguientes integrales:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx.$

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

1901. Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$$

represente una función racional?

Aplicando diversos métodos, hallar las siguientes integrales:

1903. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx.$

1904. $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}.$

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}.$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx.$

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx.$

1908. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}.$

1909. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}.$

1910. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}.$

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx.$

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx.$

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx.$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx.$

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

1921. Deducir una fórmula de recurrencia para el cálculo de la integral

$$I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a\neq 0).$$

Aplicando esta fórmula, calcular

$$I_3=\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

Indicación. Utilizar la identidad

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2).$$

1922. Aplicar la sustitución $t=\frac{x+a}{x+b}$ para el cálculo de la integral

$$I=\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

(m y n son números naturales).

Valiéndose de esta sustitución, hallar

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. Calcular

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

si $P_n(x)$ es un polinomio en x de grado n.

Indicación. Aplicar la fórmula de Taylor.

1924. Sea $R(x)=R^*(x^2)$, donde R^* es una función racional. ¿Qué particularidades posee la descomposición de la función $R(x)$ en fracciones racionales?

1925. Calcular

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

donde n es un número entero positivo.

§ 3. Integración de funciones irracionales

Mediante reducción de las funciones subintegrales a funciones racionales, hallar las siguientes integrales:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx.$

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

1930. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}.$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.   **1933.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n es un número natural).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Indicación. Hacer $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. Demostrar que la integral

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}\ \ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx,$$

donde R es una función racional y p, q, n son números enteros, es una función elemental, si

$$p+q=kn,$$

donde k es un número entero.

Hallar las integrales de las irracionalidades cuadráticas más simples:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.   **1940.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.   **1941.** $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.   **1942.** $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

Aplicando la fórmula

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx=Q_{n-1}(x)\,y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

donde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y λ es un número, hallar las siguientes integrales:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.   **1947.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

1944. $\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.   **1948.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.   **1949.** $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.   **1950.** $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1951. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

represente una función algebraica?

Hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$, donde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, descomponiendo la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es fracciones simples.

1952. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.   **1957.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1953. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.   **1958.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$.   **1959.** $\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.   **1960.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$.

1956. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Reduciendo los trinomios cuadráticos a la forma canónica, calcular las siguientes integrales:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. Valiéndose de la sustitución homográfica $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$, calcular la integral

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Hallar

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Aplicando las sustituciones de Euler:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$, si $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, si $c>0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$,

hallar las siguientes integrales:

1966. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1969. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

1970. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

Aplicando distintos métodos, hallar las siguientes integrales:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1972. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

1976. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

1977. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

1979. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1980. Demostrar que el cálculo de la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

donde R es una función racional, se reduce a la integración de una función racional.

La integral del binomio diferencial

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

donde m, n y p son números racionales, puede reducirse a la integración de funciones racionales solamente en los siguientes tres casos (teorema de Chébichev):

Caso 1. Sea p entero. Hacemos $x=z^N$, donde N es el denominador común de las fracciones m y n.

Caso 2. Sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Hacemos $a+bx^n=z^N$, donde N es el denominador de la fracción p.

Caso 3. Sea $\frac{m+1}{n}+p$ entero. Aplicamos la sustitución $ax^{-n}+b=z^N$, donde N es el denominador de la fracción p.

Si $n=1$, entonces estos casos son equivalentes a los siguientes: 1) p es entero; 2) m es entero; 3) $m+p$ es entero.

Hallar las siguientes integrales:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$.

1983. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[n]{1+x^n}}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

1990. ¿En qué casos la integral

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx,$$

donde m es un número racional, representa una función elemental?

§ 4. Integración de funciones trigonométricas

Las integrales de la forma

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

donde m y n son números enteros, se calculan mediante transformaciones artificiales o valiéndose de las fórmulas de reducción.

Hallar las integrales:

1991. $\int \cos^5 x\,dx$.

1992. $\int \sin^6 x\,dx$.

1993. $\int \cos^6 x\,dx$.

1994. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

1996. $\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$.

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$.

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x \, dx$.

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

2011. Deducir las fórmulas de reducción para las integrales:

$$\text{a) } I_n = \int \sin^n x \, dx; \quad \text{b) } K_n = \int \cos^n x \, dx \qquad (n > 2)$$

y valiéndose de ellas, calcular

$$\int \sin^6 x \, dx \quad \text{y} \quad \int \cos^8 x \, dx.$$

2012. Deducir las fórmulas de reducción para las integrales:

$$\text{a) } I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad \text{b) } K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \qquad (n > 2)$$

y valiéndose de ellas, calcular:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Las siguientes integrales se calculan valiéndose de las fórmulas:

I. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

II. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$.

III. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$.

Hallar las integrales:

2013. $\int \sin 5x \cos x \, dx$.

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$.

2015. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx$.

2016. $\int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) \, dx$.

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \, dx$.

2018. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \, dx$.

Las siguientes integrales se calculan valiéndose de las identidades:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

y

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)].$$

Calcular las integrales:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) \, dx$.

Las integrales de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$

donde R es una función racional, se reducen en el caso general a la integración de funciones racionales mediante la sustitución $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

a) Si se verifica la igualdad

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

o

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

entonces es conveniente aplicar la sustitución $\cos x = t$ o $\operatorname{sen} x = t$, respectivamente.

b) Si se verifica la igualdad

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

entonces es conveniente aplicar la sustitución $\operatorname{tg} x = t$.

Hallar las integrales:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$.

2028. $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$; a) $0 < \varepsilon < 1$; b) $\varepsilon > 1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$.

2030. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

2033. $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx.$

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx.$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}\, dx.$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

2041. Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

reduciendo el denominador a la forma logarítmica.

2042. Demostrar que

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

donde A, B, C son constantes.

Indicación. Hacer

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A (a \sin x + b \cos x) + B (a \cos x - b \sin x),$$

donde A y B son constantes.

Hallar las integrales:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx.$

2043.1. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}\, dx.$

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$

2045. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2}\, dx.$

2046. Demostrar que

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

donde A, B, C son unos coeficientes constantes.

Hallar las integrales:

2047. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx.$

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}\, dx.$

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\, dx.$

2050. Demostrar que

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

donde A, B, C son coeficientes constantes.

Hallar las integrales

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx.$

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx.$

2053. Demostrar que, si $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, entonces

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

donde A, B son coeficientes indeterminados, λ_1, λ_2 son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x \ \text{ y } \ k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1,\ 2).$$

Hallar las integrales:

2054. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\, dx.$

2055. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{2\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5\cos^2 x};$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4 \sin x \cos x}\, dx.$

2057. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

donde A, B, C son coeficientes indeterminados.

2058. Hallar

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

2059. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+$$
$$+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}\quad (|a|\neq|b|),$$

y determinar los coeficientes A, B y C, si n es un número natural mayor que la unidad.

Hallar las integrales:

2060. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx$.

2062. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$

2063. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $\quad (0<\varepsilon<1)$.

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx.$

Indicación. Hacer $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$.

2065. Deducir la fórmula de reducción para la integral

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

(n es un número natural).

§ 5. Integración de diversas funciones transcendentes

2066. Demostrar que, si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

2067. Demostrar que, si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$\int P(x)\cos ax\,dx=$$
$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{IV}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{V}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C$$

y

$$\int P(x)\sin ax\,dx=$$
$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{IV}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{V}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C.$$

Hallar las integrales:

2068. $\int x^3e^{3x}\,dx$.

2069. $\int (x^2-2x+2)\,e^{-x}\,dx$.

2070. $\int x^3\sin 5x\,dx$.

2071. $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx$.

2072. $\int x^7e^{-x^2}\,dx$.

2073. $\int x^2e^{\sqrt{x}}\,dx$.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$.

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

2076. $\int xe^x\sin x\,dx$.

2077. $\int x^2e^x\cos x\,dx$.

2078. $\int xe^x\sin^2 x\,dx$.

2079. $\int (x-\sin x)^3\,dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2081. Demostrar que, si R es una función racional y los números a_1, $a_2, \ldots, a_n$ son conmensurables, entonces la integral

$$\int R\left(e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ \ldots,\ e^{a_nx}\right)dx$$

es una función elemental.

Hallar las siguientes integrales:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}\,dx$.

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$.

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$.

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

2091. Demostrar que la integral

$$\int R(x)\,e^{ax}\,dx,$$

donde R es una función racional cuyo denominador solamente tiene raíces reales, se expresa mediante las funciones elementales y la función transcendente

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \mathrm{li}(e^{ax})+C,$$

donde

$$\mathrm{li}\,x=\int\frac{dx}{\ln x}.$$

2092. ¿En qué caso la integral

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx,$$

donde $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_n}{x^n}$, y $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes, representa una función elemental?

Hallar las integrales:

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$.

2094. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx$.

2095. $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}\,dx$.

2096. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$.

2097. $\int\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx$.

Hallar las integrales que contienen funciones del tipo $\ln f(x)$, $\mathrm{arctg}\,f(x)$, $\mathrm{arcsen}\,f(x)$, $\arccos f(x)$, donde $f(x)$ es una función algebraica:

2098. $\int \ln^n x\,dx$ (n es un número natural).

2099. $\int x^3\ln^2 x\,dx$.

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

2102. $\int\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2103. $\int\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$.

2104. $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2105. $\int x\,\mathrm{arctg}\,(x+1)\,dx$.

2106. $\int\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

2107. $\int x\arcsin(1-x)\,dx$.

2108. $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx$.

2109. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx$.

2110. $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

2111. $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2112. $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2113. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\ln(1+x^2)\,dx$.

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

2115. $\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Hallar las integrales que contienen funciones hiperbólicas:

2116. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx$.

2117. $\int \mathrm{ch}^4 x\,dx$.

2118. $\int \mathrm{sh}^3 x\,dx$.

2119. $\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,2x\,\mathrm{sh}\,3x\,dx$.

2120. $\int \mathrm{th}\,x\,dx$.

2121. $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx$.

2122. $\int \sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx$.

2123. $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}\,x+2\,\mathrm{ch}\,x}$.

2123.1. $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x-4\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x+9\,\mathrm{ch}^2x}$.

2123.2. $\int\frac{dx}{0{,}1+\mathrm{ch}\,x}$.

2123.3. $\int\frac{\mathrm{ch}\,x\,dx}{3\,\mathrm{sh}\,x-4\,\mathrm{ch}\,x}$.

2124. $\int \mathrm{sh}\,ax\sin bx\,dx$.

2125. $\int \mathrm{sh}\,ax\cos bx\,dx$.

§ 6. Diversos ejercicios de integración de funciones

Hallar las integrales:

2126. $\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

2127. $\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$.

2128. $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

2129. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2130. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

2131. $\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2132. $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

2133. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2134. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2135. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

2136. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2138. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^2}}.$

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx.$

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx.$

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,dx.$

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2143. $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx.$

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx.$

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2152. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx.$

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2155. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

2156. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2157. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx.$

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx.$

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx.$

2160. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx.$

2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx.$

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}.$

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\,dx.$

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x\,dx.$

2166. $\int |x|\,dx.$

2167. $\int x|x|\,dx.$

2168. $\int (x+|x|)^2\,dx.$

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx.$

2170. $\int e^{-|x|}\,dx.$

2171. $\int \max(1, x^2)\,dx.$

2172. $\int \varphi(x)\,dx$, donde $\varphi(x)$ es la distancia del número x al número entero más próximo.

2173. $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx \qquad (x \geqslant 0).$

2174. $\int f(x)\,dx$, donde $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } |x|\leqslant 1; \\ 1-|x| & \text{si } |x|>1. \end{cases}$

2175. $\int f(x)\,dx$, donde $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } -\infty<x<0; \\ x+1, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2x, & \text{si } 1<x<+\infty. \end{cases}$

2176. Hallar $\int x f''(x)\,dx$.

2177. Hallar $\int f'(2x)\,dx$.

2178. Hallar $f(x)$, si $f'(x^2)=\frac{1}{x} \qquad (x>0)$.

2179. Hallar $f(x)$, si $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

2180. Hallar $f(x)$, si

$$f'(\ln x)=\begin{cases} 1 & \text{para } 0<x\leqslant 1; \\ x & \text{para } 1<x<+\infty \end{cases}$$

y $f(0)=0$.

2180.1. Sea $f(x)$ una función monótona continua y $f^{-1}(x)$ su función inversa.

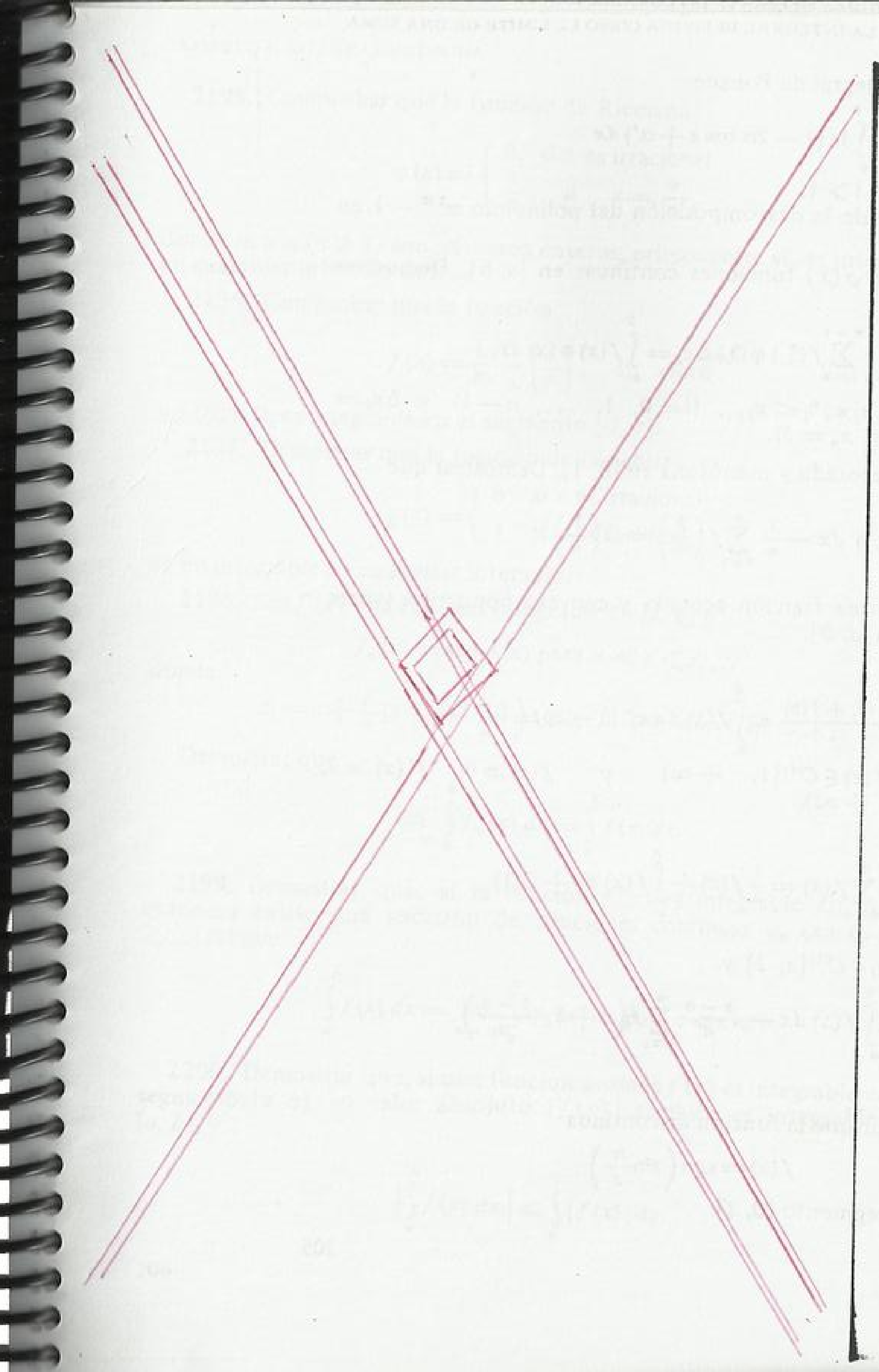
Demostrar que, si

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

entonces

$$\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

Examinar los ejemplos: a) $f(x)=x^n$ $(n>0)$; b) $f(x)=e^x$; c) $f(x)=\arcsin x$; d) $f(x)=\operatorname{Arth} x$.



Capítulo 4 INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. La integral definida como el límite de una suma

1.° Integral definida en sentido de Riemann. Si una función $f(x)$ está definida en $[a, b]$ y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, entonces, se llama integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ al número

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

donde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Para la existencia del límite (1) es necesario y suficiente que la suma integral inferior

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

y la suma integral superior

$$\overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

donde

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \text{ y } M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

tengan un límite común cuando $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Las funciones $f(x)$, para las que existe el límite del segundo miembro de la igualdad (1), se llaman (propiamente) integrables en el intervalo correspondiente. En particular, a) una función continua; b) una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad; c) una función monótona acotada, son integrables en cualquier segmento finito. Si la función $f(x)$ no está acotada en el segmento $[a, b]$, entonces no es propiamente integrable en $[a, b]$.

2.° Condición de integrabilidad. La condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la función $f(x)$ en un segmento dado $[a, b]$, es el cumplimiento de la igualdad

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i\,\Delta x_i = 0,$$

donde ω_i es la oscilación de la función $f(x)$ en el segmento $[x_i, x_{i+1}]$.

Problemas:

2181. Hallar la suma integral S_n para la función

$$f(x)=1+x$$

en el segmento $[-1,\ 4]$, dividiendo éste en n partes iguales y tomando los valores del argumento ξ_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ en los puntos medios de estas partes.

2182. Para las funciones dadas $f(x)$, hallar las sumas integrales inferior $\underline{S}_n$ y superior $\overline{S}_n$ en los segmentos respectivos, dividiendo éstos en n partes iguales, si

a) $f(x)=x^2$ $\quad[-2\leqslant x\leqslant 3]$;
b) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad[0\leqslant x\leqslant 1]$;
c) $f(x)=2^x$ $\quad[0\leqslant x\leqslant 10]$.

2183. Hallar la suma integral inferior para la función $f(x)=x^4$ en el segmento $[1,\ 2]$, dividiendo este segmento en n partes, cuyas lontitudes formen una progresión geométrica. ¿A qué es igual el límite de esta suma cuando $n\longrightarrow\infty$?

2184. Partiendo de la definición de integral, hallar

$$\int_0^T (v_0+gt)\,dt,$$

donde v_0 y g son constantes.

Calcular las integrales definidas, considerándolas como límites de las sumas integrales correspondientes y efectuando adecuadamente la partición del intervalo de integración:

2185. $\int_{-1}^{2} x^2 dx.$

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a>0).$

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$

2188. $\int_0^x \cos t\, dt.$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0<a<b).$

Indicación. Hacer $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

2190. $\int_a^b x^m\, dx \quad (0<a<b;\ m\neq -1).$

Indicación. Tomar los puntos de partición de tal modo que sus abscisas x_i formen una progresión geométrica.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0<a<b).$

2192. Calcular la integral de Poisson

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

para: a) $|\alpha|<1$; b) $|\alpha|>1$.

Indicación. Servirse de la descomposición del polinomio $\alpha^{2n}-1$ en factores cuadráticos.

2193. Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ funciones continuas en $[a,\ b]$. Demostrar que

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\vartheta_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

donde $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$, $x_i\leqslant\vartheta_i\leqslant x_{i+1}$, $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ y $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,\ x_n=b)$.

2193.1. Sea $f(x)$ acotada y monótona en $[0,\ 1]$. Demostrar que

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Sea $f(x)$ una función acotada y convexa por arriba (véase 1312) en el segmento $[a,\ b]$.

Demostrar que

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Sea $f(x)\in C^{(2)}[1,\ +\infty)$ y $f(x)\geqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$ si $x\in[1,\ +\infty)$.

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)\,dx+O(1)$$

cuando $n\longrightarrow\infty$.

2193.4. Sea $f(x)\in C^{(1)}[a,\ b]$ y

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\Delta_n$.

2194. Comprobar que la función discontinua

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

es integrable en el segmento $[0,\ 1]$.

2195. Comprobar que la función de Riemann

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x \text{ es irracional}\\ \frac{1}{n}, & \text{si } \quad x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

donde m y n ($n \geqslant 1$) son números enteros, primos entre sí, es integrable en cualquier intervalo finito.

2196. Comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

y $f(0)=0$, es integrable en el segmento $[0, 1]$.

2197. Demostrar que la función de Dirichlet

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x \text{ es irracional;}\\ 1, & \text{si } x \text{ es racional,}\end{cases}$$

es no integrable en cualquier intervalo.

2198. Sea $f(x)$ una función integrable en $[a, b]$ y

$$f_n(x)=\sup f(x) \text{ para } x_i \leqslant x < x_{i+1},$$

donde

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a). \quad (i=0,1, \ldots, n; \; n=1,2, \ldots).$$

Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2199. Demostrar que, si la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces existe una sucesión de funciones continuas $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) tal que

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{n \to \infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,dx \text{ para } a \leqslant c \leqslant b.$$

2200. Demostrar que, si una función acotada $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$, su valor absoluto $|f(x)|$ también es integrable en $[a, b]$, y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2201. Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable en el segmento $[a, b]$, o sea, que existe la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$. ¿Es integrable esta función en $[a, b]$?

Examinar el ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x \text{ es racional;}\\ -1, & \text{si } x \text{ es irracional.}\end{cases}$$

2202. Sea $f(x)$ una función integrable en $[a, b]$ y $A \leqslant f(x) \leqslant B$ para $a \leqslant x \leqslant b$, y sea $\varphi(x)$ una función definida y continua en el segmento $[A, B]$. Demostrar que la función $\varphi(f(x))$ es integrable en $[a, b]$.

2203. Siendo las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ integrables. ¿Será necesariamente integrable también la función $f(\varphi(x))$?

Examinar el ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad x=0;\\ 1, & \text{si} \quad x \neq 0,\end{cases}$$

y $\varphi(x)$ es la función de Riemann (véase el problema 2195).

2204. Sea $f(x)$ una función integrable en el segmento $[A, B]$. Demostrar que la función $f(x)$ posee la propiedad de continuidad integral, es decir,

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0,$$

donde $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Sea $f(x)$ una función integrable en el segmento $[a, b]$. Demostrar que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=0$$

cuando, y sólo cuando, $f(x) = 0$ en todos los puntos de continuidad de la función $f(x)$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

§ 2. Cálculo de integrales definidas mediante integrales indefinidas

1.° Fórmula de Newton-Leibniz*). Si la función $f(x)$ está definida y es continua en el segmento $[a, b]$ y $F(x)$ es su primitiva, o sea, $F'(x)=f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, siendo $f(x)\geqslant 0$, representa geométricamente el área S de la figura limitada por la curva $y=f(x)$, el eje Ox y las dos perpendiculares al eje Ox: $x=a$ y $x=b$ (fig. 9).

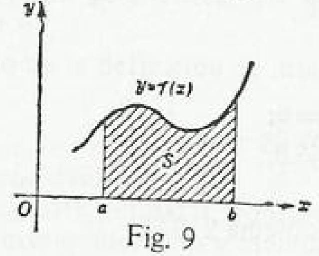


Fig. 9

2.° Fórmula de integración por partes. Si $f(x),\ g(x)\in C^{(1)}[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

3.° Cambio de variable. Si: 1) la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$; 2) la función $\varphi(t)$ es continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ en el segmento $[\alpha, \beta]$, donde $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) la función compuesta $f(\varphi(t))$ está definida y es continua en $[\alpha, \beta]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Problemas:

Aplicando la fórmula de Newton-Leibniz, hallar las siguientes integrales definidas y dibujar las superficies curvilíneas correspondientes:

2206. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$. **2207.** $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

*) También suele llamarse fórmula de Bárrow. (N. del T.).

2208. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2210. $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2211. $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

2212. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

2214. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0)$.

2215. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$.

2216. Explicar por qué la aplicación formal de la fórmula de Newton-Leibniz conduce a resultados falsos, si:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; c) $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$.

2217. Hallar $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

2218. Hallar $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Sirviéndose de integrales definidas, hallar los límites de las siguientes sumas:

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

2223. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

2224. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Hallar

2225. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. **2226.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$.

Despreciando infinitésimos de orden superior, hallar los límites de las siguientes sumas:

2227. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots \right.$
$\left. \ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

2228. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$.

2229. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$.

2230. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2231. Hallar:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx.$$

2232. Hallar:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt$.

2233. Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2\,dx}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

2233.1. Sea $f(x)\in C[0,+\infty]$ y $f(x)\to A$ cuando $x\to+\infty$. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)\,dx$.

2234. Demostrar que

$$\int_0^x e^{x^2}dx \sim \frac{1}{2x}e^{x^2}$$

cuando $x\to\infty$.

2235. Hallar

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}.$$

2236. Sea $f(x)$ una función positiva continua. Demostrar que la función

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

es creciente para $x\geqslant 0$.

2237. Hallar:

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, si $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ para } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x \text{ para } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, si $f(x)=\begin{cases} x \text{ para } 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t} \text{ para } t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

2238. Calcular y construir las gráficas de las integrales $I=I(\alpha)$, considerándolas como funciones del parámetro α, si:

a) $I=\displaystyle\int_0^1 x|x-\alpha|\,dx$; b) $I=\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$;

c) $I=\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

Aplicando la fórmula de integración por partes, hallar las siguientes integrales definidas:

2239. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx.$

2240. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx.$

2241. $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$

2242. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx.$

2243. $\int\limits_0^{1} \arccos x\,dx.$

2244. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

Aplicando una sustitución adecuada, hallar las siguientes integrales definidas:

2245. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

2246. $\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

2247. $\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

2248. $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx.$

2249. $\int\limits_0^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

2250. Calcular la integral $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, haciendo $x-\frac{1}{x}=t.$

2251. Explicar, por qué la sustitución formal de x por $\varphi(t)$ conduce a resultados falsos, si:

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx$, donde $t=x^{\frac{2}{3}}$; b) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$, donde $x=\frac{1}{t}$;

c) $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$, donde $\mathrm{tg}\,x=t.$

2252. ¿Se puede hacer en la integral

$$\int\limits_0^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin t$?

2253. ¿Se pueden tomar en la integral $\int\limits_0^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ por límites nuevos los números π y $\frac{\pi}{2}$ al hacer la sustitución $x=\text{sen}\,t$?

2254. Demostrar que, si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx=(b-a)\int\limits_0^{1} f(a+(b-a)x)\,dx.$$

2255. Demostrar la igualdad

$$\int\limits_0^{a} x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)\,dx \qquad (a>0).$$

2256. Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $[A,B]\supset[a,b]$. Hallar

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{b} f(x+y)\,dy \quad \text{para} \quad A-a<x<B-b.$$

2257. Demostrar que, si $f(x)$ es continua en $[0,1]$, entonces

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$

b) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

2258. Demostrar que, para una función $f(x)$, continua en $[-1,1]$ se tiene

1) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int\limits_0^{l} f(x)\,dx,$

si la función $f(x)$ es par, y

2) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx=0,$

si la función $f(x)$ es impar. Dar una interpretación geométrica de este resultado.

2259. Demostrar que una de las primitivas de una función par es una función impar, y que cualquier primitiva de una función impar es una función par.

2260. Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx,$$

introduciendo la nueva variable

$$t=x+\frac{1}{x}.$$

2261. Efectuar el cambio de variable sen $x=t$ en la integral

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

2262. Calcular la integral

$$\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx,$$

donde n es un número natural.

2263. Hallar

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2264. Hallar la integral

$$\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

si

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

2265. Demostrar que, si $f(x)$ es una función periódica continua, definida para $-\infty<x<+\infty$ y de período T, entonces

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx,$$

donde a es cualquier número.

2266. Demostrar que, para n impar, las funciones

$$F(x)=\int_{0}^{x}\sin^n x\,dx \quad \text{y} \quad G(x)=\int_{0}^{x}\cos^n x\,dx$$

son periódicas, de período 2π, y, para n par, cada una de estas funciones es la suma de una función lineal y una función periódica.

2267. Demostrar que la función

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

donde $f(x)$ es una función periódica continua de período T, en el caso general, es una suma de una función lineal y una función periódica de período T.

Calcular las integrales

2268. $\int_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}\,dx.$

2269. $\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

2270. $\int_{1}^{e}(x\ln x)^2\,dx.$

2271. $\int_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

2272. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

2273. $\int_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

2274. $\int_{0}^{3}\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

2275. $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

2276. $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

2277. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$

2278. $\int_{0}^{\pi}(x\sin x)^2\,dx.$

2279. $\int_{0}^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx.$

2280. $\int_{0}^{\ln 2}\mathrm{sh}^4 x\,dx.$

Aplicando las fórmulas de reducción, calcular las integrales, las cuales dependen de un parámetro n que toma valores enteros positivos:

2281. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$

2282. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx.$

2283. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx.$

2284. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx.$

2285. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2286. $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx.$

2287. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx.$

Si $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ es una función compleja de la variable real x, donde $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ e $i = \sqrt{-1}$, entonces, por definición:

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + i \int f_2(x)\, dx.$$

Es obvio que

$$\operatorname{Re} \int f(x)\, dx = \int \operatorname{Re} f(x)\, dx$$

y

$$\operatorname{Im} \int f(x)\, dx = \int \operatorname{Im} f(x)\, dx.$$

2288. Aplicando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

comprobar que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{si } m = n \end{cases}$$

(n y m son enteros).

2289. Comprobar que

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)x}\, dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α y β son constantes).

Aplicando las fórmulas de Euler:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

calcular las integrales (m y n son números enteros positivos):

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx.$

2291. $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx.$

2292. $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\, dx.$

2293. $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\, dx.$

2294. $\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\, dx.$

Hallar las integrales (n es un número natural):

2295. $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\, dx.$

2296. $\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\, dx.$

2297. $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\, dx.$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx\, dx.$

2299. Aplicando varias veces la integración por partes, calcular la integral de Euler: $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$, donde m y n son números enteros positivos.

2300. Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ se determinan por la siguiente fórmula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

2301. Sea $f(x)$ una función propiamente integrable en $[a, b]$ y $F(x)$ una función tal que $F'(x) = f(x)$ en todo $[a, b]$, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos interiores c_i $(i = 1, \ldots, p)$ y de los puntos a y b, en los cuales la función $F(x)$ tiene discontinuidades de 1.ª especie ("primitiva generalizada"). Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. Sea $f(x)$ una función propiamente integrable en el segmento $[a, b]$ y

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

su integral indefinida.

Demostrar que la función $F(x)$ es continua y que en todos los puntos de continuidad de la función $f(x)$ se verifica la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

¿Qué se puede afirmar respecto de la derivada de la función $F(x)$ en los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$?

Examinar los ejemplos:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ y $f(x) = 0$ para $x \neq \frac{1}{n}$;
b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Hallar las integrables indefinidas de las funciones acotadas discontinuas:

2303. $\int \operatorname{sgn} x\, dx$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\, dx$.

2305. $\int [x]\, dx$ $(x \geqslant 0)$.

2306. $\int x[x]\, dx$ $(x \geqslant 0)$.

2307. $\int (-1)^{[x]}\, dx$.

2308. $\int_0^x f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < l, \\ 0, & \text{si } |x| > l. \end{cases}$

Calcular las integrales definidas de las funciones acotadas discontinuas:

2309. $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x - x^3)\, dx$.

2310. $\int_0^2 [e^x]\, dx$.

2311. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6}\, dx$.

2312. $\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x)\, dx$.

2313. $\int_1^{n+1} \ln [x]\, dx$, donde n es un número natural.

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\, dx$.

2315. Hallar $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\, dx$, donde E es el conjunto de valores del segmento $[0, 4\pi]$ para los cuales tiene sentido la expresión subintegral.

§ 3. Teoremas de la media

1.° Valor medio de la función. El número

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

se llama valor medio de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$M[f] = f(c).$$

2.° Primer teorema de la media. Si: 1) las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ están acotadas y son propiamente integrables en el segmento $[a, b]$; 2) la función $\varphi(x)$ no cambia de signo para $a < x < b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

donde $m \leqslant \mu \leqslant M$ y $m = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$; 3) si, además, la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces $\mu = f(c)$, donde $a \leqslant c \leqslant b$.

3.° Segundo teorema de la media. Si: 1) las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ están acotadas y son propiamente integrables en el segmento $[a, b]$; 2) la función $\varphi(x)$ es monótona para $a < x < b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\,dx,$$

donde $a \leqslant \xi \leqslant b$; 3) si, además, la función $\varphi(x)$ es monótona decreciente (¡en sentido amplio!) y no es negativa, entonces

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b);$$

3') si la función $\varphi(x)$ es monótona creciente (¡en sentido amplio!) y no es negativa, entonces

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

Problemas:

2316. Determinar los signos de las siguientes integrales definidas

a) $\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$; c) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$; d) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx$.

2317. ¿Qué integral es mayor:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ o $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

b) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ o $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

c) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ o $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

2318. Calcular los valores medios de las funciones dadas en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$;
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 100]$;
c) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ en $[0, 2\pi]$;
d) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ en $[0, 2\pi]$.

2319. Hallar el valor medio del radio vector focal de la elipse

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

2320. Hallar el valor medio de la velocidad de la caída libre de un cuerpo cuya velocidad inicial es igual a v_0.

2321. La intensidad de la corriente alterna varía según la ley

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

donde i_0 es la amplitud, t es el tiempo, T es el período y φ es la fase inicial. Hallar el valor medio del cuadrado de la intensidad.

2321.1. Sea $f(x) \in C[0, +\infty)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$. Hallar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Examinar el ejemplo $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2322. Sea

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(\theta x).$$

Hallar θ, si:

a) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$;
b) $f(t) = \ln t$; c) $f(t) = e^t$.

¿A qué son iguales $\lim\limits_{x \to 0} \theta$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta$?

Aplicando el primer teorema de la media, acotar las integrales

2323. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}$. 2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

2325. $\int_{0}^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx.$

2326. Demostrar las igualdades:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0;\quad b)\ \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0.$$

2326.1. Hallar:

$$a)\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{1} \frac{dx}{\varepsilon x^2+1};\quad b)\ \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x},$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $f(x) \in C\,[0, 1]$.

2327. Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y sea $\varphi(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), siendo

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \quad \text{para } a < x < b.$$

Demostrar el segundo teorema de la media, aplicando la integración por partes y sirviéndose del primer teorema de la media.

Sirviéndose del segundo teorema de la media, acotar las integrales:

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

2329. $\int_{a}^{b} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x\,dx \quad (\alpha \geqslant 0;\ 0 < a < b).$

2330. $\int_{a}^{b} \sin x^2\,dx \quad (0 < a < b).$

2331. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones integrables en el segmento $[a, b]$ junto con sus cuadrados. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Buñakowski

$$\left\{\int_{a}^{b} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_{a}^{b} \varphi^2(x)\,dx \int_{a}^{b} \psi^2(x)\,dx.$$

2332. Sea $f(x)$ una función continuamente derivable en el segmento $[a, b]$ y $f(a) = 0$.

Demostrar la desigualdad

$$M^2 \leqslant (b-a) \int_{a}^{b} f'^2(x)\,dx,$$

donde

$$M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

2333. Demostrar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \qquad (p > 0).$$

§ 4. Integrales impropias

1.° Integración impropia de las funciones. Si la función $f(x)$ es propiamente integrable en cada segmento finito $[a, b]$, entonces, por definición:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si la función $f(x)$ no está acotada en un entorno del punto b y es propiamente integrable en cada segmento $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, entonces se hace:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Si los límites (1) o (2) existen, entonces la integral correspondiente se llama convergente, en caso contrario, se llama divergente.

2.° Criterio de Cauchy. Para la convergencia de la integral (1) es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$, exista un número $b = b(\varepsilon)$ tal que, para cualesquiera $b' > b$ y $b'' > b$ se verifique la desigualdad

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

INTEGRAL DEFINIDA

Demostrar las igualda

Hallar:

a f(x) conti
n (a, b), tal

si el segmento
y anotándolo
tes del signo

an $\varphi(x)$ y ψ
es cuadráticas

El enunciado del criterio de Cauchy para la integral del tipo (2) es análogo.

3.° Criterio de convergencia absoluta. Si $|f(x)|$ es impropiamente integrable, entonces la integral correspondiente (1) o (2) de la función $f(x)$ se llama absolutamente convergente y es una integral convergente.

Criterio de comparación I. Sea $|f(x)| \leqslant F(x)$ para $x \geqslant a$.

Si $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ es convergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es absolutamente convergente.

Criterio de comparación II. Si $\psi(x) > 0$ y $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ cuando $x \longrightarrow +\infty$, entonces las integrales $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ son simultáneamente convergentes o divergentes. En particular, esto se verifica si $\varphi(x) \sim \psi(x)$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

Criterio de comparación III. a) Sea

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ cuando } x \longrightarrow +\infty.$$

En este caso la integral (1) es convergente si $p > 1$, y es divergente si $p \leqslant 1$.

b) Sea

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right) \text{ cuando } x \longrightarrow b-0.$$

En este caso la integral (2) es convergente si $p < 1$, y es divergente si $p \geqslant 1$.

4.° Criterio especial de convergencia. Si: 1) la función $\varphi(x)$ es monótona y tiende a cero cuando $x \to +\infty$ y 2) la función $f(x)$ tiene primitiva acotada

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi,$$

entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

es convergente, pero, generalmente, no es absolutamente convergente.

En particular, las integrales

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \quad (a > 0)$$

son convergentes si $p > 0$.

5.° Valor principal en sentido de Cauchy. Si la función $f(x)$ es tal que, para cualquier $\epsilon > 0$ existen las integrales propias

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \quad (a < c < b),$$

entonces, por valor principal en sentido de Cauchy (v. p.) se entiende el número

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

De un modo similar,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

Problemas:

Calcular las integrales:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$

2335. $\int_0^1 \ln x\,dx.$

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

2337. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2338. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

2342. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

2343. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2345. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

2346. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \qquad (a>0).$

2347. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \qquad (a>0).$

Sirviéndose de las fórmulas de reducción, calcular las siguientes integrales impropias (n es un número natural):

2348. $I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$

2349. $I_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0).$

2350. $I_n=\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$

2351. $I_n=\int\limits_0^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$ **2352.** $I_n=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}.$

2353. a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx.$

2354. Hallar

$$\int\limits_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx,$$

donde E es el conjunto de aquellos valores de x del intervalo $(0,+\infty)$ para los cuales tiene sentido la expresión subintegral.

2355. Demostrar la igualdad

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx,$$

donde $a>0$ y $b>0$, suponiendo que la integral del primer miembro de la igualdad tiene sentido.

2356. Se llama valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$ al número

$$M\,|f|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

Hallar los valores medios de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$;

b) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; c) $f(x)=\sqrt{x}\sin x.$

2357. Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt,$

donde $\alpha>0$ y $f(t)$ es una función continua en el segmento $[0, 1]$.

Averiguar si son convergentes las integrales:

2358. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}.$

2359. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$

2360. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\ln x}.$

2361. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$

2362. $\int\limits_0^{1} x^p\ln^q\frac{1}{x}\,dx.$

2363. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx \quad (n\geqslant 0).$

2364. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx \quad (a\neq 0).$

2365. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx.$

2366. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx \quad (n\geqslant 0).$

2367. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \quad (n\geqslant 0).$

2368. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$

2369. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}.$

2370. $\int\limits_0^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

2370.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$

2371. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}.$

2372. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx.$

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx.$ **2374.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$

2375. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$

2376. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}.$ $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n).$

2376.1. $\int_0^{+\infty} x^2|x-1|^3\,dx.$

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx,$ donde $P_m(x)$ y $P_n(x)$ son polinomios primos entre sí de grados m y n, respectivamente.

Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes integrales:

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

Indicación. $|\operatorname{sen} x| \geqslant \operatorname{sen}^2 x.$

2379. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx.$

2380. $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx \quad (q \neq 0).$

2380.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,dx.$

2380.2. $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\,dx.$

2381. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,dx \quad (q \geqslant 0).$

2382. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\,dx.$

2383. $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\,dx,$

donde $P_m(x)$ y $P_n(x)$ son polinomios enteros y $P_n(x) > 0$, si $x \geqslant 0$.

2384. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente, ¿necesariamente será $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$?

Examinar los ejemplos:

a) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$; b) $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx.$

2384.1. Sea $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, $|f'(x)| < C$ cuando $x_0 \leqslant x < +\infty$ y sea convergente $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Demostrar que $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

Indicación. Examinar la integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x)\,dx.$$

2385. ¿Se puede considerar la integral impropia convergente

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

de una función no acotada $f(x)$, definida en $[a, b]$, como el límite de la suma integral correspondiente

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

donde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Supongamos que la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (1)$$

es convergente y que la función $\varphi(x)$ está acotada.

$$S=-\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt=\int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt,$$

y también

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)\,y'(t)-x'(t)y(t)]\,dt.$$

3.° El área en coordenadas polares. El área S del sector OAB (fig. 12) limitado por una curva continua $r=r(\varphi)$ y por dos semirrectas

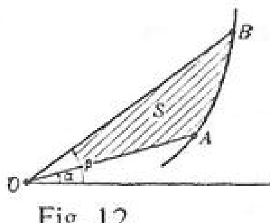


Fig. 12.

Fig. 13.

$\varphi=\alpha$ y $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, es igual a

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Problemas:

2396. Demostrar que el área de un segmento parabólico recto es igual a

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

donde b es la base y h es la altura del segmento (fig. 13).

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas dadas en coordenadas cartesianas*).

2397. $ax=y^2$, $ay=x^2$.
2398. $y=x^2$, $x+y=2$.
2399. $y=2x-x^2$, $x+y=0$.
2400. $y=|\lg x|$, $y=0$, $x=0{,}1$, $x=10$.
2400.1. $y=2^x$, $y=2$, $x=0$.
2400.2. $y=(x+1)^2$, $x=\sin\pi y$, $y=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$.
2401. $y=x$; $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.
2402. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$.

*) En éste y en los siguientes párrafos del cap. IV todos los parámetros se consideran positivos.

2403. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
2404. $y^2=x^2(a^2-x^2)$.
2405. $y^2=2px$, $27py^2=8(x-p)^3$.
2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(A>0,\ AC-B^2>0)$.
2407. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ (cisoide), $x=2a$.
2408. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$, $y=0$ (tractriz).
2409. $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x>0;\ n>-2)$.
2410. $y=e^{-x}|\sin x|$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$.

2411. ¿En qué razón divide la parábola $y^2=2x$ el área del círculo $x^2+y^2=8$?

2412. Expresar las coordenadas del punto $M(x, y)$ de la hipérbola $x^2-y^2=1$ en función del área del sector hiperbólico $S=OM'M$, limitado por el arco de hipérbola $M'M$ y por los dos rayos OM y OM', donde $M'(x, -y)$ es el punto simétrico a M respecto del eje Ox.

Hallar las áreas de las figuras limitadas por curvas dadas en forma paramétrica.

2413. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (cicloide) e $y=0$.
2414. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.
2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (desarrollo del círculo) y $x=a$, $y\leqslant 0$.
2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.
2417. $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$ (evoluta de la elipse).
2417.1. $x=a\cos t$, $y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas dadas en coordenadas polares:

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (lemniscata).
2419. $r=a(1+\cos\varphi)$ (cardioide).
2420. $r=a\sin 3\varphi$ (rosa de tres pétalos).
2421. $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ (parábola), $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.
2422. $r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ (elipse).
2422.1. $r=3+2\cos\varphi$.
2422.2. $r=\dfrac{1}{\varphi}$, $r=\dfrac{1}{\sin\varphi}$ $\left(0<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2423. $r=a\cos\varphi$, $r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ $\left(M\left(\frac{a}{2},\ 0\right)\in S\right)$.

2424. Hallar el área del sector limitado por la curva

$$\varphi=r\,\mathrm{arctg}\,r$$

y por dos rayos $\varphi=0$ y $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2424.1. Hallar el área de la figura limitada por la curva

$$r^2+\varphi^2=1.$$

2424.2. Hallar el área de la figura limitada por un pétalo de la curva

$$\varphi=\sin(\pi r)\qquad(0\leqslant r\leqslant 1).$$

2424.3. Hallar el área de la figura limitada por las líneas

$$\varphi=4r-r^3,\ \varphi=0.$$

2424.4. Hallar el área de la figura limitada por las líneas

$$\varphi=r-\sin r,\quad \varphi=\pi.$$

2425. Hallar el área de la figura limitada por la curva cerrada

$$r=\frac{2at}{1+t^2},\quad \varphi=\frac{\pi t}{1+t}.$$

Pasando a coordenadas polares, hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas:

2426. $x^3+y^3=3axy$ (folium de Descartes).
2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.
2428. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (lemniscata).

Reduciendo las ecuaciones a la forma paramétrica, hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas:

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroide).
2430. $x^4+y^4=ax^2y$.

Indicación. Hacer $y=tx$.

§ 6. Cálculo de longitudes de arcos

1.° Longitud de un arco en coordenadas cartesianas. La longitud del arco de un segmento de una curva lisa (con derivada continua)

$$y=y(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

es igual a

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2.° Longitud del arco de una curva dada en forma paramétrica. Si la curva C viene dada por las ecuaciones

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

donde $x(t),\ y(t)\in C^{(1)}[t_0,\ T]$, la longitud del arco de la curva C es igual a

$$s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3.° Longitud de un arco en coordenadas polares. Si

$$r=r(\varphi)\qquad(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

donde $r'(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, la longitud del arco del segmento correspondiente de la curva es igual a

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Las longitudes de los arcos de las curvas alabeadas se verán en el cap. VIII.

Problemas:

Hallar las longitudes de los arcos de las siguientes curvas:

2431. $y=x^{\frac{3}{2}}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$. **2432.** $y^2=2px$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$.
2433. $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ (desde el punto A $(0,a)$ hasta el punto B (b,h)).
2434. $y=e^x$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$.
2435. $x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}\ln y$ $(1\leqslant y\leqslant e)$.
2436. $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant b<a)$.

2437. $y=\ln\cos x \quad \left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$.

2438. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2} \quad (0<b\leqslant y\leqslant a)$.

2439. $y^2=\frac{x^3}{2a-x} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a\right)$.

2440. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroide)

2441. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad c^2=a^2-b^2$ (evoluta de la elipse).

2442. $x=\cos^4 t,\qquad y=\sin^4 t$.

2443. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

2444. $x=a(\cos t+t\sin t),\ \ y=a(\sin t-t\cos t)$ para $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (desarrollo de la circunferencia).

2445. $x=a(\operatorname{sh} t-t),\ \ y=a(\operatorname{ch} t-1) \quad (0\leqslant t\leqslant T)$.

2445.1. $x=\operatorname{ch}^3 t,\quad y=\operatorname{sh}^3 t \quad (0\leqslant t\leqslant T)$.

2446. $r=a\varphi$ (espiral de Arquímedes) para $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

2447. $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ para $0<r<a$.

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi} \quad \left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2450. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

2451. $r=a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2} \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

2452. $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) \quad (1\leqslant r\leqslant 3)$.

2452.1. $\varphi=\sqrt{r} \quad (0\leqslant r\leqslant 5)$.

2452.2. $\varphi=\int\limits_0^r\frac{\operatorname{sh}\varrho}{\varrho}\,d\varrho \quad (0\leqslant r\leqslant R)$.

2452.3. $r=1+\cos t,\quad \varphi=t-\operatorname{tg}\frac{t}{2} \quad (0\leqslant t\leqslant T<\pi)$.

2453. Demostrar que la longitud del arco de la elipse

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

es igual a la longitud de una onda de la sinusoide $y=c\sin\frac{x}{b}$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

2454. La parábola $4ay=x^2$ rueda sobre el eje Ox. Demostrar que el foco de la parábola describe una catenaria.

2455. Hallar la razón del área de la figura limitada por el lazo de la curva

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x},$$

el área del círculo, si la longitud de la circunferencia es igual a la longitud del contorno de esta curva.

§ 7. Cálculo de volúmenes

1.° Volumen de un cuerpo cuando se conocen las secciones transversales. Si existe el volumen V de un cuerpo y $S=S(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ es el área de la sección del cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox en el punto x, entonces

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx.$$

2.° Volumen de un cuerpo de revolución. El volumen de un cuerpo formado por la rotación alrededor del eje Ox del trapecio mixtilíneo

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

donde $y(x)$ es una función uniforme y continua, es igual a

$$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx.$$

En el caso más general, el volumen del anillo formado por la rotación alrededor del eje Ox de la figura $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$, donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones no negativas continuas, es igual a

$$V=\pi\int\limits_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx.$$

Problemas:

2456. Hallar el volumen de una buhardilla cuya base es un rectángulo de lados a y b, la arista superior es igual a c, y la altura es igual a h.

2457. Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos con los lados A, B y a, b, y la altura es igual a h.

2458. Hallar el volumen de un cono truncado cuyas bases son elipses de semiejes A, B y a, b, y la altura es igual a h.

2459. Hallar el volumen de un paraboloide de revolución cuya base es S y la altura es igual a H.

2460. Supongamos que el área $S=S(x)$ de la sección transversal de un cuerpo, efectuada perpendicularmente al eje Ox, varía según la ley cuadrática:

$$S(x)=Ax^2+Bx+C \qquad [a\leqslant x\leqslant b],$$

donde A, B y C son constantes.

Demostrar que el volumen de este cuerpo es igual a

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

donde $H=b-a$ (fórmula de Simpson).

2461. Un cuerpo representa el conjunto de puntos $M(x, y, z)$, donde $0\leqslant z\leqslant 1$, siendo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ si z es racional, y $-1\leqslant x\leqslant 0$, $-1\leqslant y\leqslant 0$ si z es irracional. Demostrar que no existe el volumen de este cuerpo, a pesar de que la integral correspondiente

$$\int_0^1 S(z)\,dz=1.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies

2462. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=\frac{c}{a}x, \quad z=0.$

2463. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (elipsoide).

2464. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=\pm c.$

2465. $x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2.$

2466. $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax.$

2467. $z^2=b(a-x), \quad x^2+y^2=ax.$

2468. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}=1 \quad (0<z<a).$

2469. $x+y+z^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2.$

2471. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Oy de la figura

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

donde $y(x)$ es una función uniforme y continua, es igual a

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)\,dx.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies obtenidas en la rotación de las siguientes líneas:

2472. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ en torno del eje Ox (superficie de Neil).

2473. $y=2x-x^2$, $y=0$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2474. $y=\sin x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$: *a) en torno del eje* Ox; b) en torno del eje Oy.

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2476. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\leqslant x<+\infty)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$ en torno del eje Ox.

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$ en torno del eje Ox.

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$ en torno del eje Ox.

2480. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy; c) en torno de la recta $y=2a$.

2481. $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2481.1. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie del lazo de la curva

$$x=2t-t^2, \quad y=4t-t^3$$

en torno: a) del eje Ox; b) del eje Oy.

2482. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la figura

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi, \quad 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$$

(φ y r son coordenadas polares) alrededor del eje polar, es igual a

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de las figuras, dadas en coordenadas polares:

2483. $r = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; a) en torno del eje polar; b) en torno de la recta $r\cos\varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje OY; c) en torno de la recta $y = x$.
Indicación. Pasar a coordenadas polares.

2484.1. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la figura limitada por una semiespira de la espiral de Arquímedes

$$r = a\varphi \qquad (a > 0;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

en torno del eje polar.

2484.2. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la figura limitada por las líneas:

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi,$$

en torno del eje polar.

2485. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie

$$a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

en torno del eje polar.

§ 8. Cálculo de áreas de superficies de revolución

El área de la superficie engendrada al girar una curva lisa AB alrededor del eje Ox, es igual a

$$P = 2\pi\int_A^B |y|\,ds,$$

donde ds es la diferencial de arco.

Problemas:

Hallar las áreas de las superficies engendradas al girar las siguientes curvas

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ en torno del eje Ox.

2487. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x| \leqslant b)$ en torno del eje Ox.

2488. $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ en tórno del eje Ox.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \leqslant a)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ en torno del eje Ox.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ en torno del eje Ox.

2493. $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(|x| \leqslant b)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2494. $\pm x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ en torno del eje Ox.

2495. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy; c) en torno de la recta $y = 2a$.
2496. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ en torno de la recta $y = x$.
2497. $r = a(1+\cos\varphi)$ en torno del eje polar.
2498. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$: a) en torno del eje polar; b) en torno del eje $\varphi = \frac{\pi}{2}$; c) en torno del eje, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Un cuerpo está engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de la figura limitada por la parábola $ay = a^2 - x^2$ y el eje Ox. Hallar la razón del área de la superficie del cuerpo de revolución al área de la superficie de una bola de igual volumen.

2500. La figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = \frac{p}{2}$ gira en torno de la recta $y = p$. Hallar el volumen y el área de la superficie del cuerpo de revolución.

§ 9. Cálculo de momentos. Coordenadas del centro de gravedad

1.° Momentos. Si, en el plano Oxy, una masa M de densidad $\rho = \rho(y)$ ocupa todo un continuo acotado Ω (una línea, una región plana) y $\omega = \omega(y)$ es la medida correspondiente (la longitud del arco, el área) de la parte de la región Ω cuyas ordenadas no son superiores a y, entonces, se llama k-ésimo momento de la masa M respecto del eje Ox al número

$$M_k = \lim_{\max\Delta y_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\,\Delta\omega(y_i) = \int_\Omega \rho y^k\,d\omega(y) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Como casos particulares, obtenemos, para $k = 0$ la masa M, para $k = 1$ el momento estático, para $k = 2$ el momento de inercia.

De un modo similar se definen los momentos de la masa respecto de los planos coordenados.

Si $\rho = 1$, el momento correspondiente se llama geométrico (momento de una línea, de una figura plana, de un cuerpo, etc.).

2.° Centro de gravedad. Las coordenadas (x_0, y_0) del centro de gravedad de una figura plana homogénea de área S se determinan por las fórmulas

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

donde $M^{(y)}$, $M^{(x)}$ son los momentos estáticos geométricos de la figura respecto de los ejes Oy y Ox.

Problemas:

2501. Hallar el momento estático y el momento de inercia del arco de una semicircunferencia de radio a, respecto del diámetro que pasa por los extremos de este arco.

2501.1. Hallar el momento estático del arco de la parábola

$$y^2=2px \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right)$$

respecto de la recta $x=\frac{p}{2}$.

2502. Hallar el momento estático y el momento de inercia de una placa triangular homogénea de base b y altura h, respecto de la base $(\rho = 1)$.

Hallar los momentos de inercia $I_x = M_2^{(x)}$ e $I_y = M_2^{(y)}$ respecto de los ejes Ox y Oy del segmento parabólico, limitado por las curvas

$$ay=2ax-x^2 \quad (a>0) \quad \text{e} \quad y=0.$$

¿A qué son iguales los radios de inercia r_x y r_y, es decir, las magnitudes definidas por las relaciones

$$I_x=Sr_x^2, \quad I_y=Sr_y^2,$$

donde S es el área del segmento?

2503. Hallar los momentos de inercia de una placa elíptica homogénea de semiejes a y b, respecto de sus ejes principales $(\rho = 1)$.

2504. Hallar el momento estático y el momento de inercia de un cono circular homogéneo de radio de la base r y de la altura h, respecto del plano de la base de este cono $(\rho = 1)$.

2504.1. Hallar el momento de inercia de una bola homogénea de radio R y masa M respecto de su diámetro.

2505. Demostrar el primer teorema de Guldin: el área de la superficie engendrada por la rotación de un arco plano C alrededor de un eje, que no se corta con la superficie y que está situado en el mismo plano que el arco, es igual a la longitud de este arco, multiplicado por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del arco C.

2506. Demostrar el segundo teorema de Guldin: el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de una figura plana S alrededor de un eje, que no se corta con la figura y que está situado en el mismo plano que la figura, es igual al producto del área S de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la figura.

2507. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del arco circular: $x = a \cos\varphi$, $y = a \operatorname{sen}\varphi$ $(|\varphi| \leqslant a \leqslant \pi)$.

2508. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por los paraboloides: $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$.

2509. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$.

2510. Hallar el centro de gravedad de un hemisferio homogéneo de radio a.

2511. Determinar las coordenadas del centro de gravedad $C(\varphi_0, r_0)$ del arco OP de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ desde el punto $0(-\infty, 0)$ hasta el punto $P(\varphi, r)$. ¿Qué curva describe el punto C en el movimiento del punto P?

2512. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por la curva $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2513. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$ $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ y el eje Ox.

2514. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo engendrado por la rotación de la figura $0 \leqslant x \leqslant a$; $y^2 \leqslant 2px$ alrededor del eje Ox.

2515. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

§ 10. Problemas de mecánica y física

Formar las sumas integrales correspondientes y una vez hallados sus límites, resolver los siguientes problemas:

2516. Hallar la masa de una varilla de longitud $l = 10$ m, si la

densidad lineal de la misma varía según la ley $\delta = 6 + 0{,}3x$ kg/m donde x es la distancia desde uno de los extremos de la varilla.

2517. ¿Qué trabajo es necesario realizar para elevar un cuerpo de masa m a la altura h de la superficie de la Tierra, cuyo radio es igual a R? ¿A qué será igual este trabajo si el cuerpo se eleva al infinito?

2518. ¿Qué trabajo es necesario realizar para alargar 10 cm un resorte elástico, si la fuerza de 1 kg alarga este resorte 1 cm? Indicación. Aplicar la ley de Hooke.

2519. Un cilindro de 20 cm de diámetro y 80 cm de longitud está lleno de vapor bajo la presión de 10 kg/cm^2. ¿Qué trabajo es necesario realizar para disminuir dos veces el volumen del vapor, suponiendo que la temperatura del mismo permanece constante?

2520. Determinar la fuerza de la presión del agua sobre una pared vertical que tiene la forma de un semicírculo de radio a, cuyo diámetro está situado en la superficie del agua.

2521. Determinar la fuerza de la presión del agua sobre una pared vertical que tiene la forma de un trapecio, cuya base inferior $a = 10$ m, la base superior $b = 6$ m y la altura $h = 5$ m, si el nivel de sumersión de la base inferior $c = 20$ m.

Formando las ecuaciones diferenciales, resolver los siguientes problemas:

2522. La velocidad de un punto varía según la ley:

$$v = v_0 + at.$$

¿Qué trayecto recorrerá este punto en el intervalo de tiempo $[0, T]$?

2523. Una bola homogénea de radio R y densidad δ gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω. Determinar la energía cinética de la bola.

2524. ¿Con qué fuerza atrae una recta material infinita de densidad lineal constante μ_0 a un punto material de masa m, situado a la distancia a de esta recta?

2525. Determinar la fuerza con que atrae una placa redonda de radio a y de densidad superficial constante δ_0 a un punto material P de masa m, situado en la perpendicular al plano de la placa, que pasa por su centro Q a la distancia mínima PQ, igual a b.

2526. Según la ley de Torricelli, la velocidad con que sale un líquido de una vasija es igual a

$$v = c\sqrt{2gh},$$

donde g es la aceleración de la fuerza de gravedad, h es la altura del líquido sobre el orificio y $c = 0{,}6$ es el coeficiente experimental.

¿En cuánto tiempo se vaciará un tonel cilíndrico vertical, lleno hasta arriba, de diámetro $D = 1$ m y altura $H = 2$ m, si el orificio redondo en el fondo tiene un diámetro $d = 1$ cm?

2527. ¿Qué forma tiene que tener una vasija, que representa un cuerpo de revolución, para que el descenso del nivel del líquido durante el derramamiento del mismo sea uniforme?

2528. La velocidad de desintegración del radio en cada momento es proporcional a su cantidad existente. Hallar la ley de desintegración del radio, si en el momento inicial $t = 0$ había Q_0 gramos de radio y durante el tiempo $T = 1600$ años esta cantidad disminuirá dos veces.

2529. Para el caso de un proceso de segundo orden, la velocidad de una reacción química que transforma la sustancia A en la sustancia B, es proporcional al producto de las concentraciones de estas sustancias. ¿Qué tanto por ciento de la sustancia B habrá en una vasija dentro de $t = 1$ hora, si para $t = 0$ minutos había 20 % de la sustancia B y para $t = 15$ minutos había ya 80 %?

2530. Según la ley de Hooke, la dilatación relativa ε de una barra es proporcional a la intensidad de la fuerza σ en la sección transversal correspondiente, o sea,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

donde E es el módulo de Young.

Determinar la dilatación de una barra pesada de forma cónica, fijada a la base y con el vértice invertido hacia abajo, si el radio de la base es igual a R, la altura del cono es H y el peso específico es γ.

§ 11. Cálculo aproximado de integrales definidas

1.° Fórmula de los rectángulos. Si la función $y = y(x)$ es continua y derivable un número suficiente de veces en un segmento cerrado $[a, b]$ y

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih \ (i = 0, 1, \ldots, n), \quad y_i = y(x_i),$$

se tiene

$$\int_a^b y(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2.° Fórmula de los trapecios. Con las mismas notaciones, se tiene:

$$\int_b^a y(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

donde

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi') \qquad (a \leqslant \xi' \leqslant b).$$

3.° Fórmula parabólica (fórmula de Simpson). Haciendo $n = 2k$, se tiene:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) + \right.$$
$$\left. + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})\right] + R_n,$$

donde

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\xi'') \qquad (a \leqslant \xi'' \leqslant b).$$

Problemas:

2531. Aplicando la fórmula de los rectángulos ($n = 12$), calcular aproximadamente

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$$

y comparar el resultado con la respuesta exacta.

Sirviéndose de la fórmula de los trapecios, calcular las integrales y acotar los errores, si:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \qquad (n = 8).$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \qquad (n = 12).$

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}\;dx \qquad (n = 6).$

Sirviéndose de la fórmula de Simpson, calcular las integrales:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx \quad (n = 4).$

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\,dx \quad (n = 6).$

2537. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (n = 10).$

2538. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)} \quad (n = 6).$

2539. Tomando $n = 10$, calcular la constante de Katalan

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

2540. Sirviéndose de la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

calcular el número π con una exactitud hasta 10^{-5}.

2541. Calcular

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

con una exactitud hasta 0,001.

2542. Calcular $\int_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}\,dx$ con una exactitud hasta 10^{-4}.

2543. Calcular con exactitud hasta 0,001 la integral de probabilidad

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

2544. Hallar aproximadamente la longitud de la elipse cuyos semiejes son $a = 10$ y $b = 6$.

2545. Construir por puntos la gráfica de la función

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

tomando

$$\Delta x = \frac{\pi}{3}.$$

Capítulo 5 SERIES

§ 1. Series numéricas. Criterios de convergencia de las series de términos de signo constante

1.° Conceptos generales. Una serie numérica

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

se llama convergente, si existe

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad \text{(suma de la serie)},$$

donde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. En caso contrario, la serie (1) se llama divergente.

2.° Criterio de Cauchy. Para la convergencia de la serie (1) es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $N = N(\varepsilon)$ tal que para $n > N$ y $p > 0$ se verifique la desigualdad

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon.$$

En particular, si la serie es convergente, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

3.° Criterio de comparación I. Supongamos que, además de la serie (1), se tiene la serie

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \tag{2}$$

Si, para $n \geqslant n_0$, se verifica la desigualdad

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

entonces, 1) de la convergencia de la serie (2) se deduce la convergencia de la serie (1); 2) de la divergencia de la serie (1) se deduce la

En particular, si $a_n \sim b_n$ para $n \to \infty$, las series de términos positivos (1) y (2) son convergentes o divergentes simultáneamente.

4.° Criterio de comparación II. Si

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{*)},$$

entonces, a) si $p > 1$ la serie (1) es convergente y b) si $p \leqslant 1$, es divergente.

5.° Criterio de D'Alembert. Si $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

entonces, a) si $q < 1$ la serie (1) es convergente y b) si $q > 1$, es divergente.

6.° Criterio de Cauchy. Si $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

entonces, a) si $q < 1$ la serie (1) es convergente y b) si $q > 1$, es divergente.

7.° Criterio de Raabe. Si $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

entonces, a) si $p > 1$ la serie (1) es convergente y b) si $p < 1$, es divergente.

8.° Criterio de Gauss. Si $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

donde $|\theta_n| < C$ y $\varepsilon > 0$, entonces, a) si $\lambda > 1$ la serie (1) es convergente y b) $\lambda < 1$, es divergente; c) si $\lambda = 1$ la serie (1) es convergente para $\mu > 1$ y es divergente para $\mu \leqslant 1$.

9.° Criterio integral de Cauchy. Si $f(x)$ $(x > 0)$ es una función no negativa y no creciente, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

*) El significado del símbolo O^* véase en el cap. I, § 6, 1.°.

es convergente o divergente simultáneamente con la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Problemas:

Demostrar directamente la convergencia de las siguientes series y hallar sus sumas:

2546. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$

2548. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

2551. a) $q \sin\alpha + q^2 \sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots$;
b) $q\cos\alpha + q^2 \cos 2\alpha + \ldots + q^n \cos n\alpha + \ldots$ $(|q| < 1)$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

2553. Averiguar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx$.

Indicación. Comprobar que para $x \neq k\pi$ (k es un entero) es imposible que sea $\sin nx \to 0$ cuando $n \to \infty$.

2554. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{donde } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \qquad (p_1 = 1,\ p_1 < p_2 < \ldots),$$

obtenida como resultado de la agrupación de los términos de la serie dada sin infringir el orden que siguen, también es convergente y tiene la misma suma. Lo recíproco no es justo; exponer un ejemplo.

2555. Demostrar que, si los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son positivos y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, obtenida por agrupación de los términos de esta serie, es convergente, entonces la serie dada también es convergente.

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

2556. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2557. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$

2565. Demostrar que una serie de números, que son recíprocos a los términos de una progresión aritmética, es divergente.

2566. Demostrar que, si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) son convergentes y $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) también es convergente. ¿Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de la serie (C) si las series (A) y (B) son divergentes?

2567. Sean dadas dos series divergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

de términos no negativos.

¿Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de las series:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \quad \text{y} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)?$$

2568. Demostrar que, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también lo es. Lo recíproco no es justo; poner ejemplos.

2569. Demostrar que, si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes, entonces también lo son las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

2570. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0,$$

entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

2571. Demostrar que, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos decrecientes, es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

2572. ¿Será convergente la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, si

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}) = 0$$

para $p = 1, 2, 3, \ldots$?

Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de las siguientes series:

2573. $a_0+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$ $\quad (|a_n| < 10)$.

2574. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{2^n}+\ldots$

2575. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\ldots$

$$\ldots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\ldots$$

2575.1. $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos x^n}{n^2}+\ldots$

Indicación. Aplicar la desigualdad

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Aplicando los criterios de comparación de, D'Alembert o Cauchy, estudiar la convergencia de las series:

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

2577.1. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

Aplicando los criterios de comparación de D'Alembert o Cauchy, estudiar la convergencia de las series:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2581. a) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots$;

b) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

2585. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$.

2585.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

donde

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{si} \quad n=m^2,\\ \frac{1}{n^2}, & \text{si} \quad n\neq m^2\end{cases}$$

(m es un número natural).

2585.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

2589.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$.

2589.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

Indicación. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

2591. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (a_n>0),$$

entonces $a_n=o\,(q_1^n)$, donde $q_1>q$.

2591.1. Supongamos que para los términos de la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ se verifica la desigualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\rho<1 \quad \text{para} \quad n\geqslant n_0.$$

Demostrar que para el resto de la serie

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

se verifica la acotación

$$R_n \leqslant a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \quad \text{si} \quad n \geqslant n_0.$$

2591.2. ¿Cuántos términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!},$$

donde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$, es suficiente tomar, para que la suma parcial correspondiente S_n difiera de la suma de la serie S menos que $\epsilon = 10^{-6}$?

2592. Demostrar que, si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Lo recíproco no es justo. Examinar el ejemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

2593. Demostrar que, si para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{A}$$

entonces también existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{B}$$

Lo recíproco no es justo: existiendo el límite (B), puede no existir el límite (A). Examinar el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Demostrar que, si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \qquad (a_n \geqslant 0),$$

entonces, a) si $q < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; b) si $q > 1$ esta serie es divergente (criterio generalizado de Cauchy).

Estudiar la convergencia de las series:

2595. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

2596. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 [\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

2597.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n - \ln n}$.

Aplicando los criterios de Raabe y Gauss, estudiar la convergencia de las siguientes series:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \dots$

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$ $(a > 0,\ b > 0,\ d > 0)$.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$ $(q > 0)$.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$.

2605 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p > 0,\ q > 0)$.

2606. Demostrar que, si para la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ se cumple la condición

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

donde $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño; además, si $p > 0$, se tiene $a_n \downarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, es decir, a_n para $n \geqslant n_0$ es monótona decreciente y tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$.

Determinando el orden de decrecimiento del término general a_n, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si

2607. $a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q}$, donde $n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$. **2614.** $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

2614.1. Demostrar el criterio de Jame: unas series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ es convergente, si

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1 \quad \text{para} \quad n > n_0,$$

y es divergente, si

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leqslant 1 \quad \text{para} \quad n > n_0.$$

2615. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ es convergente, si existe un $\alpha > 0$ tal, que $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ para $n \geqslant n_0$, y es divergente, si $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$ para $n \geqslant n_0$ (criterio logarítmico).

Averiguar la convergencia de las series con los términos generales:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2617. $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ $(n > 1)$.

2618. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ $(n > 1)$.

Aplicando el criterio integral de Cauchy, averiguar la convergencia de las series con los términos generales:

2619. $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$ $(n > 1)$.

2620. $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ $(n > 2)$.

2620.1. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ \ldots \ \ln (n+1)}{\ln (2+p) \cdot \ln (3+p) \ \ldots \ \ln (n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2},$$

donde $\nu(n)$ es el número de cifras del número n.

2620.3. Sean λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ las raíces positivas consecutivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} x = x.$$

Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}.$$

2621. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

2622. Demostrar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cuyos términos positivos forman una sucesión monótona decreciente, es convergente o divergente simultáneamente con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Sea $f(x)$ una función positiva, monótona y no creciente.

Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente, entonces para su resto

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

se verifica la acotación

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Aplicando esto, hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

con una exactitud hasta 0,01.

2624. Demostrar el criterio de Ermakov: sea $f(x)$ una función positiva, monótona decreciente y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente, si $\lambda < 1$, y es divergente si $\lambda > 1$.

2625. Demostrar el criterio de Lobachevski: una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyos términos positivos forman una sucesión monótona que tiende a cero, es convergente o divergente simultáneamente con la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

donde p_m es el índice máximo de los términos a_n que cumplen la desigualdad

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \ldots, p_m).$$

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

2626. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b})$.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2} - \sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$.

2634. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

2639. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^2} - 1)$.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\frac{1}{n^2} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n + c\ln^2 n)}$ $(a>0)$.

2644. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a>0,\ b>0)$.

2645. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.

Averiguar la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los siguientes términos generales:

2646. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

2648. $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

2649. $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2650. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$.

2651. $u_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Sustituyendo las sucesiones x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ por las series correspondientes, estudiar la convergencia de éstas, si:

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

2654. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. ¿Cuántos términos de la serie hay que tomar, aproximadamente, para hallar su suma con una exactitud hasta 10^{-5}, si

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

§ 2. Criterios de convergencia de series de términos de cualquier signo

1.° Convergencia absoluta de la serie. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

se llama absolutamente convergente, si es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad (2)$$

En este caso, la serie (1) también es convergente. La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden de los sumandos.

Para determinar la convergencia absoluta de la serie (1) es suficiente aplicar a la serie (2) los criterios conocidos de convergencia de las series de términos de signo constante.

Si la serie (1) es convergente y la serie (2) es divergente, la serie (1) se llama condicionalmente (no absolutamente) convergente. Mediante una permutación de los términos, la suma de una serie condicionalmente convergente se puede hacer igual a cualquier número (teorema de Riemann).

2.° Criterio de Leibniz. La serie alternada

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

$(b_n \geqslant 0)$ es convergente (por lo general, no absolutamente) si a) $b_n \geqslant b_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. En este caso, para el resto de la serie

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

se tiene la cota

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1),$$

3.° Criterio de Abel. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad (3)$$

es convergente, si: 1) la serie, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; 2) los números b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ forman una sucesión monótona y acotada.

4.° Criterio de Dirichlet. La serie (3) es convergente, si: 1) las sumas parciales $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ están acotadas; 2) b_n forman una sucesión monótona que tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Problemas:

2656. Demostrar que los términos de una serie no absolutamente convergente se pueden agrupar, sin permutarlos, de tal modo que la nueva serie obtenida sea absolutamente convergente.

2657. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si se cumplen las condiciones: a) el término general a_n de esta serie tiende a cero cuando $n \to \infty$; b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, obtenida como resultado de la

agrupación de los términos de la serie dada sin alterar su orden, es convergente; c) el número de términos a_i que figuran en $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \ldots)$, está acotado.

2658. Demostrar que la suma de una serie convergente no varía si se permutan sus términos de tal modo que ninguno de ellos se aleje de su posición inicial más de n sitios, donde m es un número previamente dado.

Demostrar la convergencia de las siguientes series y hallar sus sumas:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots$

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

Indicación. Aplicar la fórmula $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n$, donde C es la constante de Euler y $\lim_{n \to \infty} \epsilon_n = 0$.

2662. Sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, hallar las sumas de las series que se obtienen de la dada como resultado de la permutación de sus términos:

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$

y

b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

2663. Los términos de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

se deben permutar de tal modo que se convierta en una serie divergente.

Estudiar la convergencia de las series de términos de signo variable:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2666. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$

2666.1. Séa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \qquad (1)$$

donde $b_n > 0$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. ¿Se deduce de aquí que la serie (1) es convergente? Examinar el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

2667. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

2671. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + k^2})$.

2672. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2673.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$.

2674. Demostrar que una serie alternada

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots \quad (b_n > 0)$$

es convergente si

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

donde $p > 0$ (véase 2606).

Estudiar la convergencia absoluta (a excepción del 2690) y condicional de las siguientes series:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

2677. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2680. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2687. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p$.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

2691. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Indicación. Demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Sea

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

una función racional, donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y $| b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q | > 0$ para $x \geqslant n_0$.

Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Estudiar la convergencia de las series:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \ldots$

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \ldots$

2697. Demostrar que las series

a) $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$;

b) $\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots$

son convergentes no absolutamente en el intervalo $(0, \pi)$.

2698. Para las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

determinar para el conjunto de parámetros (p, x); a) la región de convergencia absoluta; b) la región de convergencia no absoluta.

2698.1. Estudiar la convergencia de las series:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$; c) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$.

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$;

2699. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\, n^q}$$

determinar: a) la región de convergencia absoluta: b) la región de convergencia condicional.

2700. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

donde $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

2701. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

¿se puede afirmar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ también es convergente?

Examinar los ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right].$$

2702. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie no absolutamente convergente y

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},\quad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. Demostrar que la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

para cada $p>0$ está comprendida entre $\frac{1}{2}$ y 1.

2703.1. ¿Cuántos términos de la serie se deben tomar para obtener su suma con una exactitud hasta $\varepsilon=10^{-6}$, si:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{\circ}}{\sqrt{n}}$.

2704. Demostrar que, si los términos de la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

se permutan de tal modo que a cada grupo de p términos positivos consecutivos le sustituya un grupo de q términos negativos consecutivos, entonces la suma de la nueva serie será igual a

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

2705. Demostrar que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

permanece divergente si, no permutando sus términos, se cambian sus signos de tal modo que después de p términos positivos sucedan q términos negativos ($p\neq q$). La convergencia solamente tiene lugar para $p=q$.

§ 3. Operaciones con las series

Suma y producto de series. Por definición

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

donde

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

La igualdad a) tiene un sentido no formal si ambas series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, y la igualdad b), si, además, al menos de una de estas series es absolutamente convergente.

Problemas:

2706. ¿Qué se puede afirmar respecto de la suma de dos series, de las cuales a) una es convergente y la otra divergente; b) ambas son divergentes?

2707. Hallar la suma de las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right].$$

Hallar las sumas de las siguientes series:

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$. **2709.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(|xy|<1)$.

2711. Comprobar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

2712. Comprobar que $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ $(|q|<1)$.

2713. Comprobar que el cuadrado de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

es una serie divergente.

2714. Demostrar que el producto de las dos series convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

es una serie convergente si $\alpha+\beta>1$ y es divergente si $\alpha+\beta<1$.

2715. Comprobar que el producto de las dos series divergentes

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \quad \text{y} \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

es una serie absolutamente convergente.

§ 4. Series funcionales

1.° Campo de convergencia. El conjunto X_0 de aquellos valores de x, para los que es convergente la serie funcional

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

se llama campo de convergencia de esta serie, y la función

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x) \qquad (x\in X_0)$$

suma de la misma.

2.° Convergencia uniforme. Una sucesión de funciones

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

se llama uniformemente convergente en el conjunto X, si:

1) existe la función límite

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (x\in X);$$

2) para cualquier $\varepsilon>0$ se puede señalar un número $N=N(\varepsilon)$ tal, que

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

para $n>N$ y $x\in X$. En este caso, se escribe: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

La serie funcional (1) se llama uniformemente convergente en el conjunto X, si la sucesión de sus sumas parciales

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

es uniformemente convergente en este conjunto.

3.° Criterio de Cauchy. Para la convergencia uniforme de la serie (1) en el conjunto X es necesario y suficiente que, para todo $\varepsilon>0$ exista un número $N=N(\varepsilon)$ tal, que para $n>N$ y $p>0$ se verifique la desigualdad

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon \quad \text{para todos } x\in X.$$

4.° Criterio de Weierstrass. La serie (1) es absoluta y uniformemente convergente en el conjunto X, si existe una serie numérica convergente

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \tag{2}$$

tal que

$$|u_n(x)|\leqslant c_n \quad \text{para } x\in X \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

5.° Criterio de Abel. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\,b_n(x) \tag{3}$$

es uniformemente convergente en el conjunto X, si: 1) la serie $\sum_{n=1}^{N}a_n(x)$ es uniformemente convergente en el conjunto X; 2) las funciones $b_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) están acotadas en conjunto y para cada x forman una sucesión monótona.

6.° Criterio de Dirichlet. La serie (3) es uniformemente convergente en el conjunto X, si: 1) las sumas parciales $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ están acotadas en conjunto; 2) la sucesión $b_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) es monótona para cada x y uniformemente tiende a cero en X cuando $n\longrightarrow\infty$.

7.° Propiedades de las series funcionales. a) La suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua.

b) Si la serie funcional (1) es uniformemente convergente en el intervalo (a, b) y existen límites finitos

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=A_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

entonces, 1) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ es convergente y, 2) se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a}u_n(x)\right\}.$$

c) Si los términos de una serie convergente (1) tienen derivada continua para $a<x<b$ y la serie de las derivadas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ es uniformemente convergente en el intervalo (a, b), entonces

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad \text{para } x \in (a, b).$$

d) Si los términos de la serie (1) son funciones continuas y la serie es uniformemente convergente en el segmento finito $[a, b]$, se tiene

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \qquad (4)$$

En general, la fórmula (4) es válida si $\int\limits_a^b R_n(x)\, dx \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, donde $R_n(x) = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Esta última condición sirve también para el caso de límites infinitos de integración.

Problemas:

Determinar el campo de convergencia (absoluta y condicional) para las siguientes series funcionales:

2716. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

2717. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n$.

2721. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\quad 0<x<\pi)$.

2724. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (serie de Lambert).

2725. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

2726. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

2729. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\ldots(2-x^{\frac{1}{n}})$ $(x>0)$.

2731. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

2732. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $(y \geqslant 0)$.

2734. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x \geqslant 0)$.

2736. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Demostrar que, si la serie de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ es convergente para $x=x_1$ y para $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, entonces esta serie es convergente también para $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Determinar el campo de convergencia de la serie de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

y hallar su suma.

2739. Hallar los campos de convergencia (absoluta y condicional) de las series de Newton:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n y^{[n]}}{n^n}$,

donde

$$x^{[n]} = x(x-1)\ldots[x-(n-1)].$$

2740. Demostrar que, si la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ es convergente para $x = x_0$, entonces también es convergente para $x > x_0$.

2741. Demostrar que para la convergencia uniforme en un conjunto X de una sucesión $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hacia la función límite $f(x)$, es necesario y suficiente que

$$\lim_{n \to \infty} \{ \sup_{x \in X} r_n(x) \} = 0,$$

donde $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. ¿Qué significa que la sucesión $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$: a) es convergente en el intervalo $(x_0, +\infty)$; b) es uniformemente convergente en cada intervalo finito $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; c) es uniformemente convergente en el intervalo $(x_0, +\infty)$?

2743. Hallar, para la sucesión

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < x < 1)$$

el subíndice mínimo $N = N(\epsilon, x)$, comenzando desde el cual, la desviación de los términos de la sucesión en el punto dado x de la función límite no es superior a 0,001, si $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

¿Es uniformemente convergente esta sucesión en el intervalo (0,1)?

2744. ¿Cuántos términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

se deben tomar para que la suma parcial $S_n(x)$ difiera de la suma de la serie para $-\infty < x < +\infty$ menos que ϵ? Efectuar el cálculo numérico para: a) $\epsilon = 0,1$; b) $\epsilon = 0,01$; c) $\epsilon = 0,001$.

2745. ¿Para qué valores de n puede garantizarse la validez de la desigualdad

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0,001 \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)?$$

Averiguar si son uniformemente convergentes las sucesiones en los intervalos indicados:

2746. $f_n(x) = x^n$; a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; b) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $\quad 0 < x < +\infty$.

2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; a) $0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$; b) $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1 + \varepsilon$; c) $1 + \varepsilon \leqslant x < +\infty$, donde $\varepsilon > 0$.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; a) $0 \leqslant x \leqslant 1$; b) $1 < x < +\infty$.

2753. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$; $\quad -\infty < x < +\infty$.

2754. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $\quad 0 < x < +\infty$.

2755. a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$; $\quad -\infty < x < +\infty$; b) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$.

2756. a) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $\quad 0 < x < +\infty$; b) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$.

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $\quad 0 < x < 1$.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; a) $-l < x < l$, donde l es un número positivo arbitrario; b) $-\infty < x < +\infty$.

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$; $\quad 0 < x < 1$.

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; a) en el intervalo finito (a, b); b) en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2761. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; $\quad 1 \leqslant x \leqslant a$.

2762. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2$.

2763. $$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}; \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{si } x \geqslant \frac{2}{n} \end{cases}$$

en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2764. Sea $f(x)$ una función arbitraria, definida en el segmento $[a, b]$, y

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Demostrar que

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

2765. Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada continua $f'(x)$ en el intervalo (a, b) y

$$f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

Demostrar que $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ en el segmento $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, donde $a < \alpha < \beta < b$.

2766. Sea $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, donde $f(x)$ es una función continua. Demostrar que la sucesión $f_n(x)$ es uniformemente convergente en cualquier segmento finito $[a, b]$.

Estudiar el carácter de convergencia de las siguientes series.

2767. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, a) en el intervalo $|x| < q$, donde $q < 1$; b) en el intervalo $|x| < 1$.

2768. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2768. 1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$;

a) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$; b) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

2774. Aplicando el criterio de Weierstrass, demostrar la convergencia uniforme en los intervalos indicados de las siguientes series funcionales:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $\quad -\infty < x < +\infty$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $\quad -2 < x < +\infty$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $\quad |x| < +\infty$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\quad \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, donde a es un número positivo arbitrario;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $\quad |x| < +\infty$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $\quad |x| < +\infty$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $\quad |x| < +\infty$;

j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$, $\quad |x| < a$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $\quad |x| < +\infty$.

Averiguar si son uniformemente convergentes las siguientes series funcionales en los intervalos indicados:

2775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sin a) en el segmento $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$; b) en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

Indicación. Acotar el resto de la serie.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$; $|x| \leqslant 10$.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2783. ¿Puede converger uniformemente hacia una función continua una sucesión de funciones discontinuas?

Examinar el ejemplo

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \text{ es irracional;} \\ 1, \text{ si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

2784. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ es uniformemente convergente en $[a, b]$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ también es uniformemente convergente en $[a, b]$.

2785. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absoluta y uniformemente convergente en $[a, b]$, entonces: ¿será también necesariamente uniformemente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ en $[a, b]$?

Examinar el ejemplo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. Demostrar que la serie absoluta y uniformemente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2 (2^{n+1} \pi x), & \text{si } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{si } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

no puede mayorarse por una serie numérica convergente de términos no negativos.

2787. Demostrar que, si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

cuyos términos son funciones monótonas en el segmento $[a, b]$, es absolutamente convergente en los extremos de este segmento, entonces es absoluta y uniformemente convergente en el segmento $[a, b]$.

2788. Demostrar que una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento comprendido en el interior de su intervalo de convergencia.

2789. Supongamos que $a_n \to \infty$ de tal modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ es convergente. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado y acotado que no contenga puntos a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2790. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

es uniformemente convergente para $x \geqslant 0$.

2791. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

es uniformemente convergente en la región $x \geqslant 0$.

2792. Comprobar que la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

es continua y tiene derivada continua en la región $-\infty < x < +\infty$.

2793. Comprobar que la función

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$$

a) está definida y es continua en todos los puntos, a excepción de los puntos enteros: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; b) es periódica, de período igual a 1.

2794. Comprobar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx}-(n-1)\,xe^{-(n-1)\,x}\right]$$

es convergente, pero no uniformemente, en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ a pesar de que su suma es una función continua en este segmento.

2795. Determinar los campos de existencia de las funciones $f(x)$ y estudiar la continuidad, si

a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$; c) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$;

2796. Sean r_k ($k = 1, 2, \dots$) los números racionales del segmento $[0, 1]$. Comprobar que la función

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

posee las siguientes propiedades: 1) es continua; 2) es derivable en los puntos irracionales y no derivable en los racionales.

2797. Demostrar que la función Zeta de Riemann

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

es continua en la región $x > 1$ y tiene en esta región derivadas continuas de todos los órdenes.

2798. Demostrar que la función Theta

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

está definida y es infinitamente derivable para $x > 0$.

2799. Determinar el campo de existencia de la función $f(x)$ y estudiar su derivabilidad, si:

a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$; b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

2800. Comprobar que la sucesión

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n\quad(n=1,\ 2,\dots)$$

es uniformemente convergente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, pero

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

2801. Comprobar que la sucesión

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

es uniformemente convergente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, pero

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. ¿Para qué valores del parámetro α: a) la sucesión

$$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}\qquad(1)$$

($n = 1, 2, \dots$) es convergente en el segmento $[0, 1]$; b) la sucesión (1) es uniformemente convergente en $[0, 1]$; c) es posible el paso al límite bajo el signo de la integral

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

2803. Comprobar que la sucesión

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

es convergente en el segmento [0, 1], pero

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

2804. Comprobar que la sucesión

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge no uniformemente en el segmento [0, 1], a pesar de que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

2805. ¿Es lícito el paso al límite bajo el signo de la integral en la expresión

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\, dx?$$

Hallar:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$. 2808. $\lim\limits_{x\to +0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

2808.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. ¿Es lícita la derivación término a término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}?$$

2810. ¿Es lícita la integración término a término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

en el segmento [0, 1]?

2811. Sea $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ una función infinitamente derivable y supongamos que la sucesión de sus derivadas $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es uniformemente convergente en todo intervalo finito (a, b) hacia una función $\varphi(x)$. Demostrar que $\varphi(x) = Ce^x$, donde C es una constante. Examinar el ejemplo $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

2811.1. Supongamos que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, están definidas y acotadas en $(-\infty, +\infty)$ y que $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en todo segmento $[a, b]$. ¿Implica esto que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x f(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§ 5. Series potenciales

1.° Intervalo de convergencia. Para cada serie de potencias

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + .$$

existe un intervalo de convergencia: $|x - a| < R$ tal que en el interior del mismo la serie es convergente y en el exterior es divergente. El radio de convergencia R se determina por la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

El radio de convergencia R también puede determinarse por la fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

si este límite existe.

2.° Teorema de Abel. Si la serie de potencias $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ es convergente en el extremo $x = R$ del intervalo de convergencia, se tiene

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3.° Serie de Taylor. Una función $f(x)$, analítica en el punto a, es desarrollable en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

El resto de esta serie

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

puede expresarse en la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

(forma de Lagrange), o en la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta_1<1)$$

(forma de Cauchy).

Es necesario recordar los cinco desarrollos fundamentales siguientes:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1).$

4.° Operaciones con las series de potencias. En el interior del intervalo de convergencia común $|x-a|<R$, se tiene:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n;$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$

donde

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0;$$

c) $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$

d) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$

5.° Series de potencias en el campo complejo. Examinemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

donde

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Para cada serie de éstas existe un círculo de convergencia $|z-a|<R$, tal que en el interior del mismo la serie es convergente (y, además, absolutamente) y en el exterior es divergente. El radio de convergencia R es igual al radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

en el campo real.

Problemas:

Determinar el radio y el intervalo de convergencia y estudiar el comportamiento en los puntos de la frontera del intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}.$

2813. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$

2814. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n.$

2815. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\cdot x^n \quad (0<\alpha<1).$

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n.$

2817. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1).$

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n.$

2819. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n.$

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n.$

2821. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n \quad (a>0,\ b>0).$

2822. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0).$

2823. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>0).$

2824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$

2825. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n.$

2826. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n.$

2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n$.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (serie de Pringsheim).

2831.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n$, donde $\nu(n)$ es el número de cifras de n.

2831.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

Problemas:

2832. Determinar el campo de convergencia de la serie hipergeométrica

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\dots n\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n+$$

Hallar el campo de convergencia de las series de potencias generalizadas:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$.

2836. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

2838. Desarrollar la función

$$f(x)=x^3$$

en serie de potencias enteras no negativas del binomio $x+1$.

2839. Desarrollar la función

$$f(x)=\frac{1}{a-x} \qquad (a\neq 0)$$

en serie de potencias: a) en potencias de x; b) en potencias del binomio $x-b$, donde $b\neq a$; c) en potencias de $\frac{1}{x}$. Indicar los campos de convergencia correspondientes.

2840. Desarrollar la función $f(x)=\ln x$ en serie de potencias enteras no negativas de la diferencia $x-1$ y hallar el intervalo de convergencia del desarrollo.

Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Escribir los desarrollos de las siguientes funciones en serie de potencias enteras no negativas de la variable x y hallar los intervalos de convergencia correspondientes:

2841. $f(x)=\operatorname{sh} x$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch} x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

2844. $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x)=\cos(\mu \arcsin x)$.

2847. Escribir tres términos del desarrollo de la función $f(x)=x^x$ en serie de potencias enteras no negativas de la diferencia $x-1$.

2848. Escribir tres términos del desarrollo de la función $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ y $f(0)=e$ en serie de potencias enteras no negativas de la variable x.

2849. Desarrollar las funciones $\sin(x+h)$ y $\cos(x+h)$ en serie de potencias enteras no negativas de la variable h.

2850. Determinar el intervalo de convergencia del desarrollo en serie de potencias de la función

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

a) en serie de potencias de x; b) en serie de potencias del binomio $x-5$, sin efectuar el desarrollo mismo.

2850.1. ¿Se puede afirmar que

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \rightrightarrows \sin x \text{ en } (-\infty, +\infty) \text{ cuando } N\to\infty?$$

Aplicando los desarrollos I – V, escribir los desarrollos en serie de potencias respecto de x de las siguientes funciones:

2851. e^{-x^2}.

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Indicación. Descomponer la fracción dada en fracciones simples.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

¿A qué es igual $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\frac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2864. $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2865. $\frac{x\,\mathrm{sh}\,\alpha}{1-2x\,\mathrm{ch}\,\alpha+x^2}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Indicación. Aplicar las fórmulas de Euler.

Desarrollando previamente las derivadas e integrando luego término a término, obtener los desarrollos en serie de potencias de las siguientes funciones:

2869. $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x)=\arcsin x$.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

2873. Aplicando diversos métodos, hallar los desarrollos en serie de potencias de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

b) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

d) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

e) $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

f) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$;

g) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

h) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

2874. Aplicando la unicidad del desarrollo

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots,$$

hallar las derivadas de n-ésimo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x^2}$; b) $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

2875. Desarrollar la función

$$f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$$

en serie de potencias enteras positivas del binomio $x+1$.

2876. Desarrollar la función

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

en serie de potencias negativas de la variable x.

2877. Desarrollar la función

$$f(x)=\ln x$$

en serie de potencias enteras positivas de la fracción $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Desarrollar la función

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

en serie de potencias enteras positivas de la fracción $\frac{x}{1+x}$.

2879. Sea

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Demostrar directamente que

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

2880. Sea por definición

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Demostrar que

a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2881. Escribir unos cuantos términos del desarrollo en serie de potencias de la función

$$f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}.$$

Efectuando las operaciones correspondientes con las series de potencias, obtener los desarrollos en serie de potencias de las siguientes funciones:

2882. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

2883. $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x) = \ln^2(1-x)$.

2885. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

2887. $f(x) = e^x \sin x$.

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2889. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Escribir tres términos del desarrollo (distinto de cero) en serie de potencias positivas de la variable x de las siguientes funciones:

2891. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

2892. $f(x) = \operatorname{th} x$.

2893. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$.

2894. Supongamos que el desarrollo de la función $\sec x$ viene escrito en la forma

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Deducir una relación de recurrencia para los coeficientes E_n (los números de Euler).

2895. Desarrollar en serie de potencias la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \qquad (|x|<1).$$

2896. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Escribir el desarrollo de la función $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene el radio de convergencia R_1 y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tiene el radio de convergencia R_2, ¿qué radio de convergencia R tienen las series

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Sea

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{y} \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Demostrar que el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cumple las desigualdades

$$l \leqslant R \leqslant L.$$

2899. Demostrar que, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, siendo

$$|n!\, a_n| < M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde M es una constante, se tiene: 1) $f(x)$ es infinitamente derivable en cualquier punto a; 2) se verifica el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x| < +\infty).$$

2899.1. Sea $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ y $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ para $x \in (a, b)$. Demostrar que la función $f(x)$ es desarrollable en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x_0 \in (a, b)),$$

que es convergente en el intervalo (a, b).

2899.2. Sea $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ y $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ para $x \in [-1, 1]$. Demostrar que la función $f(x)$ es desarrollable en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

Indicación. Teniendo en cuenta que las derivadas $f^{(n)}(x)$ son monótonas, para el resto $R_n(x)$ de la serie de Taylor de la función $f(x)$ obtener la cota

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} f(1).$$

2900. Demostrar que, si: 1) $a_n \geqslant 0$ y 2) existe

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

Desarrollar en serie de potencias las funciones:

2901. $\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx.$

2905. $\int_0^x \frac{t\, dt}{\ln(1+t)}$ (escribir cuatro términos)

Aplicando la derivación término a término, calcular las sumas de las siguientes series:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$

2910. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots$

Indicación. Multiplicar la derivada de la serie por $1 - x$.

Aplicando la integración término a término, calcular las sumas de las series:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

2913. $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \ldots$

2914. Comprobar que la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

satisface a la ecuación

$$y^{\mathrm{IV}} = y.$$

2915. Comprobar que la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

satisface a la ecuación

$$xy'' + y' - y = 0.$$

Determinar el radio y el círculo de convergencia de las series de potencias en el campo complejo ($z = x + iy$):

2916. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}.$

2917. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$

2918. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}.$

2919. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}.$

2920. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{i\varphi})^n}{n(1-e^{i\varphi})^n}.$

2921. Aplicando la fórmula de Newton, calcular aproximadamente $\sqrt[3]{9}$ y acotar el error que se obtiene al tomar tres términos del desarrollo.

2922. Calcular aproximadamente:

a) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; b) $\sqrt[10]{1000}$; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\ln 1{,}25$

y acotar los errores correspondientes.

Aplicando los desarrollos correspondientes, calcular con la precisión indicada los valores siguientes de las funciones:

2923. sen 18° con exactitud hasta 10^{-5}.

2924. cos 1° con exactitud hasta 10^{-6}.

2925. tg 9° con exactitud hasta 10^{-3}.

2926. e con exactitud hasta 10^{-6}.

2927. ln 1,2 con exactitud hasta 10^{-4}.

2928. Aplicando la igualdad

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2},$$

hallar el número π con exactitud hasta 10^{-4}.

2929. Aplicando la identidad

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

calcular el número π con exactitud hasta 0,001.

2930. Aplicando la identidad

$$\frac{\pi}{4}=4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{239},$$

calcular $\ln 2$ y $\ln 3$ con exactitud hasta 10^{-9}.

2931. Aplicando la fórmula

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\ldots\right],$$

calcular $\ln 2$ y $\ln 3$ con exactitud hasta 10^{-5}.

2932. Sirviéndose de los desarrollos de las funciones subintegrales en serie, calcular con exactitud hasta 0,001 las siguientes integrales:

a) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$;

b) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$;

c) $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$;

d) $\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx$;

e) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\,dx$;

f) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

g) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

h) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

i) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$;

j) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$;

k) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$;

l) $\int\limits_0^{1} x^x\,dx$.

2933. Hallar con exactitud hasta 0,01 la longitud del arco de una semionda de la sinusoide

$$y=\sin x \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

2934. Hallar con exactitud hasta 0,01 la longitud del arco de la elipse de semiejes $a=1$ y $b=\frac{1}{2}$.

2935. Un cable, suspendido de dos postes, que están a la distancia de $2l=20$ m, tiene la forma de una parábola. Calcular con exactitud hasta 1 cm la longitud del cable si la sagita de la flexión es igual a $h=40$ cm.

§ 6. Series de Fourier

1.° Teorema del desarrollo. Si una función $f(x)$ es continua a trozos y tiene derivada continua a trozos $f'(x)$ en el intervalo $(-l, l)$, siendo regulares todos sus puntos de discontinuidad (o sea, $f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]$), entonces, esta función puede expresarse en este intervalo por la serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

donde

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (2)$$

y

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2')$$

En particular:
a) si la función $f(x)$ es par, se tiene:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3)$$

donde

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

b) si la función $f(x)$ es impar, se tiene:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (4)$$

donde

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Una función $f(x)$, definida en el intervalo $(0, l)$ y que posee en el mismo las propiedades expuestas anteriormente de continuidad, puede expresarse en este intervalo tanto por la fórmula (3) como por la fórmula 4).

2.° Condición de complitud. Para toda función $f(x)$, integrable en el intervalo junto con su cuadrado, la serie (1) construida formalmente con los coeficientes (2), (2'), satisface a la igualdad de Liapunov*)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx.$$

3.° Integración de las series de Fourier. La serie de Fourier (1), incluso si es divergente, de una función $f(x)$ que es integrable según Riemann en el intervalo $(-l, l)$, puede integrarse término a término en este intervalo.

Problemas:

2936. Desarrollar la función

$$f(x)=\sin^4 x$$

en serie de Fourier.

2937. ¿Cuál será la serie de Fourier para un polinomio trigonométrico

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)?$$

2938. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x)=\operatorname{sgn}x \qquad (-\pi<x<\pi).$$

Dibujar la gráfica de la función y las gráficas de unas cuantas sumas parciales de la serie de Fourier de esta función.

Aplicando el desarrollo, hallar la suma de la serie de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Desarrollar las siguientes funciones en serie de Fourier en los intervalos indicados:

2939. $f(x)=\begin{cases}A, & \text{si } 0<x<l;\\ 0, & \text{si } l<x<2l,\end{cases}$

donde A es una constante, en el intervalo $(0, 2l)$.

2940. $f(x)=x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2941. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

*) Conocida frecuentemente como igualdad de Parseval. (N. del T.).

2942. $f(x)=|x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2943. $f(x)=\begin{cases}ax, & \text{si } -\pi<x<0;\\ bx, & \text{si } 0<x<\pi,\end{cases}$

donde a y b son constantes, en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2944. $f(x)=\pi^2-x^2$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2945. $f(x)=\cos ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$(a no es entero).

2946. $f(x)=\sin ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es entero).

2947. $f(x)=\operatorname{sh} ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2948. $f(x)=e^{ax}$ en el intervalo $(-h, h)$.

2949. $f(x)=x$ en el intervalo $(a, a+2l)$.

2950. $f(x)=\sin x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2951. $f(x)=x\cos x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Desarrollar en serie de Fourier las siguientes funciones periódicas:

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x)=x-[x]$.

2956. $f(x)=(x)$ que es la distancia de x hasta el número entero más próximo.

2957. $f(x)=|\sin x|$.

2958. $f(x)=|\cos x|$.

2959. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ $\qquad (|\alpha|<1)$.

2960. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x)=\sec x \qquad \left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

Indicación. Deducir una relación entre los coeficientes a_n y a_{n-2}.

2961. Desarrollar la función $f(x)=x^2$ en serie de Fourier: a) de cosenos de arcos múltiples; b) de senos de arcos múltiples; c) en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Dibujar la gráfica de la función y las gráficas de las sumas de las series de Fourier para los casos a), b) y c).

Aplicando estos desarrollos, hallar las sumas de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\quad \text{y}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Basándose en el desarrollo

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\qquad (-\pi<x<\pi),$$

obtener por integración término a término los desarrollos en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi,\pi)$ de las funciones x^2, x^3 y x^4.

2963. Escribir la igualdad de Liapunov para la función

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{para } |x|<\alpha;\\ 0 & \text{para } \alpha<|x|<\pi.\end{cases}$$

Basándose en la igualdad de Liapunov, hallar las sumas de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\quad \text{y}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & \text{si } 1<x<2;\\ 3-x, & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

Sirviéndose de las fórmulas

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

donde $t=e^{ix}$ y $\bar{t}=e^{-ix}$, obtener el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:

2965. $\cos^{2m}x$ (m es un número entero positivo).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $\quad(|q|<1)$.

Desarrollar en serie de Fourier las funciones periódicas no acotadas:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2973. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt\quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

2974. Desarrollar en serie de Fourier las funciones

$$x=x(s),\quad y=y(s),\qquad (0\leqslant s\leqslant 4a),$$

que dan la expresión paramétrica del contorno del cuadrado: $0<x<a$, $0<y<a$, donde s es la longitud del arco, tomado desde el punto $O(0,0)$, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

2975. ¿Cómo debe prolongarse al intervalo $(-\pi,\pi)$ una función integrable $f(x)$, dada en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, para que su desarrollo en serie de Fourier tenga la forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\qquad (-\pi<x<\pi)?$$

2976. ¿Cómo debe prolongarse al intervalo $(-\pi,\pi)$ una función integrable $f(x)$, dada en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, para que su desarrollo en serie de Fourier tenga la forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\qquad (-\pi<x<\pi)?$$

2977. Desarrollar la función

$$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$:

a) en serie de cosenos de arcos impares; b) en serie de senos de arcos impares.

Dibujar las gráficas de las sumas de las series de Fourier para los casos a) y b).

2978. La función $f(x)$ es antiperiódica, de período π, o sea,

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

¿Qué particularidad posee la serie de Fourier de esta función en el intervalo $(-\pi, \pi)$?

2979. ¿Qué particularidad posee la serie de Fourier de una función $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, si $f(x+\pi)=f(x)$?

2980. ¿Qué particularidades poseen los coeficientes de Fourier a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$ de una función $f(x)$ de período 2π, si la gráfica de la función: a) tiene centros de simetría en los puntos $(0, 0)$, $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$; b) tiene un centro de simetría en el origen de coordenadas y los ejes de simetría $x=\pm\frac{\pi}{2}$?

2981. ¿Cómo están ligados entre sí los coeficientes de Fourier a_n, b_n y α_n, β_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, si

$$\varphi(-x)=\psi(x)?$$

2982. ¿Cómo están ligados entre sí los coeficientes de Fourier a_n, b_n y α_n, β_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, si

$$\varphi(-x)=-\psi(x)?$$

2983. Conociendo los coeficientes de Fourier a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de una función integrable $f(x)$, de período 2π, calcular los coeficientes de Fourier $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de la función "desplazada" $f(x+h)$ $(h=\text{const})$.

2984. Conociendo los coeficientes de Fourier a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de una función integrable $f(x)$, de período 2π, calcular los coeficientes de Fourier A_n, B_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de la función de Steklov

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

2985. Sea $f(x)$ una función continua de período 2π y a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, sus coeficientes de Fourier. Determinan los coeficientes de Fourier A_n, B_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de la función "convolucionada"

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt.$$

Basándose en el resultado obtenido, deducir la igualdad de Liapunov.

§ 7. Sumación de series

1.° Sumación inmediata. Si

$$u_n=v_{n+1}-v_n \quad (n=1, 2, \ldots) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} v_n=v_\infty,$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=v_\infty-v_1.$$

En particular, si

$$u_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+m}},$$

donde los números a_i $(i=1, 2, \ldots)$ forman una progresión aritmética con la diferencia d, se tiene:

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_n a_{n+1}\ldots a_{n+m-1}}.$$

En algunos casos se consigue expresar la serie dada en forma de una combinación lineal de las series conocidas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \quad \text{etc.}$$

2.° Método de Abel. Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

En los casos más elementales, la suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se halla mediante la derivación e integración término a término.

3.° Sumación de series trigonométricas. Al buscar las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$$

éstas se consideran como la parte real y como el coeficiente de la parte imaginaria, respectivamente, de la suma de la serie de potencias en el campo complejo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde $z=e^{ix}$.

A menudo, suele ser útil la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}.$$

Problemas:

Hallar las sumas de las series:

2986. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$

2987. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

2988. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$ (m es un número natural).

2991. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$

2992. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

2993. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

2995. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

2996. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2997. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

3000. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Sea $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n,$$

Hallar las sumas de las siguientes series:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.

3003. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

3005. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

Mediante la derivación término a término, hallar las sumas de las series:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\ldots nd}x^n$ $(d>0)$.

Indicación. Multiplicar la derivada de la serie por $1-x$.

3010. $\frac{1}{3}\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots$

Mediante la integración término a término, hallar las sumas de las series:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Aplicando el método de Abel, hallar las sumas de las siguientes series:

3014. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots$

3015. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

3016. $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$

3017. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots$

Hallar las sumas de las siguientes series trigonométricas:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

3019. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

3020. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$.

3023. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

3024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

3026. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

3027. Construir la curva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

Hallar las sumas de las siguientes series:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$.

3029. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ suponiendo que $x>0$, $a_n>0$ ($n=1, 2, \dots$) y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es divergente.

3032. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, si a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, si a) b) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

§ 8. Cálculo de integrales definidas por medio de series

Desarrollando las funciones subintegrales en serie, calcular las siguientes integrales:

3034. $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}\, dx$.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln (x+\sqrt{1+x^2})}{x}\, dx$.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln (1+x)}{x}\, dx$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1} \ln (1-x^q)\, dx \quad (p>0,\ q>0)$.

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln (1-x)\, dx$.

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^{2\pi x}-1}$.

3040. $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^x+1}$.

3041. Desarrollar en serie de potencias enteras positivas del módulo k ($0 \leqslant k < 1$) la integral elíptica completa de 1ª especie.

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

3042. Desarrollar en serie de potencias enteras positivas del módulo k ($0 \leqslant k < 1$) la integral elíptica completa de 2ª especie.

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

3043. Expresar la longitud del arco de la elipse

$$x = a \cos t, \quad x = b \sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

mediante una serie de potencias enteras positivas de la excentricidad.

Demostrar las igualdades:

3044. $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

3045. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}$.

3046. $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos (\sin x) \cos nx\, dx = \frac{\pi}{n!} \qquad (n=0, 1, 2, \dots)$.

Hallar:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,dx$ (n es un número natural).

3048. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx.$

Indicación. Véase el ejemplo 2864.

3049. $\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$

3050. Demostrar la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n\frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \qquad (1)$$

donde $a>0$ y $0<\theta_n<1$.

¿Con qué precisión se expresará la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}\,dx,$$

si en la fórmula (1) se toman dos términos?

§ 9. Productos infinitos

1.° Convergencia de un producto infinito. Un producto infinito

$$p_1p_2\dots p_n\dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \qquad (1)$$

se llama convergente, si existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n=\infty} P_n = P.$$

y es distinto de cero.

Si $P=0$ y ninguno de los factores p_n es igual a cero, el producto (1) se llama divergente hacia cero; en caso contrario, el producto se llama convergente hacia cero.

La convergencia del producto (1) es equivalente a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n. \qquad (2)$$

La condición necesaria de convergencia es:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Si $p_n = 1+\alpha_n$ ($n=1, 2, \dots$) y α_n no cambia de signo, para la convergencia del producto (1) es necesario y suficiente que sea convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \qquad (3)$$

En el caso general, cuando α_n no conserva el signo constante y la serie (3) es convergente, el producto (1) es convergente o divergente hacia cero conjuntamente con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2.° Convergencia absoluta. El producto (1) se llama absolutamente o condicionalmente (no absolutamente) convergente según que sea absolutamente o condicionalmente convergente la serie (2). La condición necesaria y suficiente para la convergencia absoluta del producto (1) es la convergencia absoluta de la serie (3).

3.° Desarrollo de las funciones en productos infinitos. Para $-\infty<x<+\infty$ se verifican los desarrollos

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

En particular, de la primera, tomando $x=\frac{\pi}{2}$, se obtiene la fórmula de Wallis.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Problemas:

Demostrar las siguientes igualdades:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2.$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$.

3056. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$.

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

3058. $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$.

3059. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Demostrar la convergencia y determinar los valores de los siguientes productos infinitos:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

3062. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

3063. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

3064. $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ $(a>0)$.

3065. ¿Se deduce de la convergencia de los productos $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ la convergencia de los productos

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; c) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; d) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$?

Averiguar si son convergentes los siguientes productos infinitos:

3066. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3067. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

3070. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, donde $n^2+an+b>0$ para $n\geqslant n_0$.

3072. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_p)}$, donde $n_0>b_i$ $(i=1, 2, \dots, p)$.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$, donde $c>0$.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

3083. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. Demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ es convergente si es convergente la serie $\prod_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

3087. Demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ es convergente si es absolutamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Estudiar la convergencia absoluta y condicional de los siguientes productos infinitos:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\times$
$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\dots$

3097. $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\dots$

3098. Comprobar que el producto

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

es convergente, a pesar de que la serie

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

es divergente.

3099. Comprobar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ donde

$$\alpha_n=\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{si } n=2k-1,\\ \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{si } n=2k,\end{cases}$$

es convergente, a pesar de que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ son divergentes.

3100. Sea

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

(función Zeta de Riemann) y sea p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ la sucesión de números primos.

Demostrar que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

3101. Demostrar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n},$$

donde p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es la sucesión de números primos, es divergente (Euler).

3102. Sea $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\qquad(\varepsilon>0).$$

Demostrar que

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Indicación. Examinar

$$\lim_{n\to\infty}a_n n^p=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. Aplicando la fórmula de Wallis, demostrar que

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. Demostrar que la expresión

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

tiene un límite A, distinto de cero, cuando $n\longrightarrow\infty$.

Deducir de esto la fórmula de Stirling

$$n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

donde $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ y $A=\sqrt{2\pi}$.

Indicación. Expresar el límite buscado en forma de un producto infinito

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Para determinar la constante A, aplicar la fórmula de Wallis.

3105. Según Euler, la función Gamma $\Gamma(x)$ se define por la siguiente fórmula

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Basándose en esta fórmula: a) expresar la función $\Gamma(x)$ en forma de un producto infinito; b) comprobar que $\Gamma(x)$ tiene sentido para todos los valores reales de x que no son iguales a un entero negativo; c) deducir la propiedad

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x);$$

d) obtener el valor $\Gamma(n)$ para n entero y positivo.

3106. Supongamos que la función $f(x)$ es propiamente integrable en el segmento $[a, b]$ y sea

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

3107. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e},$$

donde $a > 0$ y $b > 0$.

3108. Sean $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ funciones continuas en el intervalo (a, b) y $|f_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$, donde la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

Demostrar que la función

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

es continua en el intervalo (a, b).

3109. Hallar la expresión para la derivada de la función

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)].$$

¿Cuáles son las condiciones suficientes para la existencia de $F'(x)$?

3110. Demostrar que, si $0 < x < y$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)} = 0.$$

§ 10. Fórmula de Stirling

Para calcular $n!$ para valores grandes de n es útil la fórmula de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

Problemas:

Aplicando la fórmula de Stirling, calcular aproximadamente

3111. $\lg 100!$

3112. $1\cdot 3\cdot 5 \ldots 1999.$

3113. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 99}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 100}.$

3114. $C_{100}^{40}.$

3115. $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}.$

3116. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^{50}\,dx.$

3117. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{200} x\,dx.$

3118. Deducir una fórmula asintótica para el producto

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

3119. Calcular aproximadamente C_{2n}^{n}, si n es grande.

3120. Aplicando la fórmula de Stirling, hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Aproximación de las funciones continuas mediante polinomios

1.° Fórmula de interpolación de Lagrange. El polinomio de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i$$

posee la propiedad $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0,\ 1, \ldots, n)$.

2.° Polinomios de Bernstéin. Si $f(x)$ es una función continua en el segmento $[0, 1]$, los polinomios de Bernstéin

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

convergen uniformemente hacia la función $f(x)$ en el segmento $[0, 1]$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

3121. Construir el polinomio $P_n(x)$ de grado mínimo n, que tome el sistema dado de valores:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

¿A qué son aproximadamente iguales

$$P_n(-1),\ P_n(1),\ P_n(6)?$$

3122. Escribir la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

3123. Deducir la fórmula para la extracción aproximada de raíces $y = \sqrt{x}$ $(1 \leqslant x \leqslant 100)$, aprovechando los valores $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

3124. Deducir una fórmula de aproximación de la forma

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 90),$$

utilizando los valores

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

3125. Construir el polinomio de interpolación de Lagrange para la función $f(x) = |x|$ en el segmento $[-1, 1]$, tomando por nodos los puntos: $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

3126. Sustituyendo la función $y(x)$ por el polinomio de Lagrange, calcular aproximadamente

$$\int_0^2 y(x)\,dx,$$

donde

x	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	5	4,5	3	2,5	5

3127. Formar los polinomios de Bernstéin $B_n(x)$ para las funciones x, x^2, x^3 en el segmento $[0, 1]$.

3128. Escribir la fórmula de los polinomios de Bernstéin $B_n(x)$ para una función $f(x)$, dada en el segmento $[a, b]$.

3129. Aproximar la función $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$ en el segmento $[-1, 1]$ mediante el polinomio de Bernstéin $B_4(x)$.

Construir las gráficas de las funciones $y = \frac{|x| + x}{2}$ e $y = B_4(x)$.

3130. Aproximar la función $f(x) = |x|$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ mediante los polinomios de Bernstéin de orden par.

3131. Escribir el polinomio de Bernstéin $B_n(x)$ para la función

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

3132. Calcular el polinomio $B_n(x)$ para la función $f(x) = \cos x$ en el segmento $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3133. Demostrar que $|x| = \lim\limits_{n \to \infty} P_n(x)$ en el segmento $[-1, 1]$, donde

$$P_n(x) = 1 - \frac{1 - x^2}{2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2i-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2i)} (1 - x^2)^i.$$

3133.1. Sea $f(x) \in C[a, b]$ y

$$M_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostrar que $f(x) \equiv 0$ para $x \in [a, b]$.

Indicación. Aplicar el teorema de Weierstrass sobre la aproximación de una función continua mediante polinomios.

3134. Sea $f(x)$ una función continua y periódica, de período 2π y sean a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sus coeficientes de Fourier. Demostrar que los polinomios trigonométricos de Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

convergen uniformemente hacia la función $f(x)$ en el segmento $[-\pi, \pi]$.

3135. Construir el polinomio de Fejér $\sigma_{2n-1}(x)$ para la función

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Capítulo 6 CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Límite de una función. Continuidad

1.° Límite de una función. Sea $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función definida en un conjunto E que tiene un punto de acumulación P_0. Se dice que

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A,$$

si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ tal que

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

siempre que $P \in E$ y $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, donde $\rho(P, P_0)$ es la distancia entre los puntos P y P_0.

2.° Continuidad. Una función $f(P)$ se llama continua en el punto P_0, si

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Una función $f(P)$ es continua en un recinto dado, si es continua en cada punto de este recinto.

3.° Continuidad uniforme. Una función $f(P)$ se llama uniformemente continua en un recinto G, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende solamente de ε, tal que, para cualesquiera puntos P' y P'' de G, se verifica la desigualdad

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

siempre que sea

$$\rho(P', P'') < \delta.$$

Una función que es continua en un recinto cerrado y acotado, es uniformemente continua en este recinto.

Problemas:

Determinar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones:

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

3137. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

3138. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3139. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\frac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\frac{x}{x+y}$.

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3149. $u=\ln(xyz)$.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

Construir las líneas de nivel de las siguientes funciones:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\frac{y}{x}$.

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

3159.1. $z=\min(x, y)$.

3159.2. $z=\max(|x|, |y|)$.

3159.3. $z=\min(x^2, y)$.

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

3161. $z=x^y$ $(x>0)$.

3162. $z=x^y e^{-x}$ $(x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}$ $(a>0)$.

3164. $z=\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

Averiguar el carácter de la superficie por su ecuación:

3171. $z=f(y-ax)$.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3174. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. Construir la gráfica de la función

$$F(t)=f(\cos t, \sin t),$$

donde

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & \text{si } y\geqslant x,\\ 0, & \text{si } y<x.\end{cases}$$

3176. Hallar $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ si $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

3177. Hallar $f(x)$, si

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad(x>0).$$

3178. Sea

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

Determinar las funciones f y z, si $z=x$ para $y=1$.

3179. Sea

$$z=x+y+f(x-y).$$

Hallar las funciones f y z, si $z=x^2$ para $y=0$.

3180. Hallar $f(x, y)$, si $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

3181. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\}=1;\quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\}=-1,$$

mientras que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

3182. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\}=0,$$

a pesar de que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

3183. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

ambos límites $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\}$ y $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\}$

no existen, a pesar de que existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$.

3183.1. ¿Existe el límite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}?$$

3183.2. ¿A qué es igual el límite de la función

$$f(x, y)=x^2 e^{-(x^2-y)}$$

a lo largo de cualquier rayo

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha \qquad (0\leqslant t<+\infty)$$

cuando $t\to+\infty$?

¿Se puede llamar a esta función infinitésima cuando $x\to\infty$ e $y\to\infty$?

3184. Hallar

$$\lim_{x\to a}\{\lim_{y\to b} f(x, y)\} \text{ y } \lim_{y\to b}\{\lim_{x\to a} f(x, y)\},$$

si:

a) $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

b) $f(x, y)=\frac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=+0$;

c) $f(x, y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

d) $f(x, y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

e) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

Hallar los siguientes límites dobles:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. ¿Sobre qué direcciones φ existe el límite finito:

a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; b) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$,

si $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$?

Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

3197. $u=\sin\frac{1}{xy}$.

3198. $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u=\frac{1}{xyz}$.

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Comprobar que la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

es continua respecto de cada variable x e y por separado (para un valor fijado de la otra variable), pero no es continua respecto del conjunto de estas variables.

3203. Comprobar que la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{si } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

es continua en el punto O (0, 0) a lo largo de cada rayo

$$x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

que pase por este punto, es decir, existe

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0);$$

sin embargo, esta función no es continua en el punto (0, 0).

3203.1. Estudiar la continuidad uniforme de la función lineal

$$u=2x-3y+5$$

en el plano infinito $E^2=\{|x|<+\infty,\ |y|<+\infty\}$.

3203.2. Estudiar la continuidad uniforme de la función

$$u=\sqrt{x^2+y^2}.$$

en el plano $E^2=\{|x|<+\infty,\ |y|<+\infty\}$

3203.3. ¿Es uniformemente continua la función

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

en el recinto $x^2+y^2<1$?

3203.4 ¿Es continua la función

$$u=\arcsin\frac{x}{y}.$$

en su campo de definición E?

¿Será esta función uniformemente continua en el recinto E?

3204. Comprobar que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función $f(x,y)=x\ \mathrm{sen}\ \dfrac{1}{y}$, si $y\neq 0$ y $f(x,0)=0$, no es cerrado.

3205. Demostrar que, si la función $f(x,y)$ es continua respecto de la variable x en un recinto G y es continua respecto de y uniformemente respecto de x en G, entonces esta función es continua en el recinto considerado.

3206. Demostrar que, si en un recinto G la función $f(x,y)$ es continua respecto de la variable x y satisface a la condición de Lipschitz respecto de la variable y, o sea,

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

donde $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$ y L es una constante, entonces esta función es continua en el recinto dado.

3207. Demostrar que, si la función $f(x,y)$ es continua respecto de cada variable x e y por separado y es monótona respecto de una de ellas, entonces esta función es continua respecto del conjunto de las variables (teorema de Young).

3208. Supongamos que la función $f(x,y)$ es continua en el recinto $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$, y que la sucesión de las funciones $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ es uniformemente convergente en $[a,A]$ y cumple la condición $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$. Demostrar que la sucesión de funciones

$$F_n(x)=f(x,\varphi_n(x))\qquad(n=1,2,\ldots)$$

también es uniformemente convergente en $[a,A]$.

3209. Supongamos que: 1) la función $f(x,y)$ es continua en el recinto R $(a<x<A;\ b<y<B)$; 2) la función $\varphi(x)$ es continua en el intervalo (a,A) y toma valores que pertenecen al intervalo (b,B). Demostrar que la función

$$F(x)=f(x,\varphi(x))$$

es continua en el intervalo (a,A).

3210. Supongamos que: 1) la función $f(x,y)$ es continua en el recinto R $(a<x<A;\ b<y<B)$; 2) las funciones $x=\varphi(u,v)$ e $y=\psi(u,v)$ son continuas en el recinto R' $(a'<u<A';\ b'<v<B')$ y toman valores pertenecientes a los intervalos (a,A) y (b,B), respectivamente. Demostrar que la función

$$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\ \psi(u,v))$$

es continua en el recinto R'.

§ 2. Derivadas parciales. Diferencial de una función

1.° Derivadas parciales. El resultado de la derivación parcial de una función de varias variables no depende del orden de derivación, si todas las derivadas que figuran en el cálculo son continuas.

2.° Diferencial de una función. Si el incremento total de una función $f(x,y,z)$, de las variables independientes x, y, z, puede expresarse en la forma

$$\Delta f(x,y,z)=A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z+o(\varrho),$$

donde A, B, C no dependen de Δx, Δy, Δz y $\varrho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$, la función $f(x,y,z)$ se llama diferenciable en el punto (x,y,z) y la parte lineal del incremento $A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z$, igual a

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\,dx+f'_y(x,y,z)\,dy+f'_z(x,y,z)\,dz,\qquad(1)$$

donde $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, $dz=\Delta z$, se llama diferencial de esta función.

La fórmula (1) conserva su valor también en el caso en que las variables x, y, z son funciones diferenciables de otras variables independientes.

Si x, y, z son variables independientes, entonces para las diferenciales de orden superior se verifica la fórmula simbólica

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z).$$

3.° Derivada de una función compuesta. Si $w = f(x, y, z)$, donde $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ y las funciones f, φ, ψ, χ son diferenciables, se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Para calcular las derivadas de segundo orden de la función w es conveniente utilizar las fórmulas simbólicas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x} + Q_2\frac{\partial}{\partial y} + R_2\frac{\partial}{\partial z}\right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

donde

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

y

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4.° Derivada en una dirección dada. Si la dirección l en el espacio $Oxyz$ se caracteriza por los cosenos directores: $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ y la función $u = f(x, y, z)$ es diferenciable, la derivada según la dirección l se calcula por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

La velocidad del crecimiento máximo de la función en un punto dado se determina, en su valor absoluto así como su dirección, por el vector, denominado gradiente de la función:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k,$$

cuya magnitud es igual a

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Problemas:

3211. Comprobar que

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

3212. Hallar $f'_x(x, 1)$, si

$$f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212.1. Hallar $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$, si

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

¿Es esta función diferenciable en el punto $O(0, 0)$?

3212.2. ¿Es diferenciable la función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ en el punto $O(0, 0)$?

3212.3. Averiguar si es diferenciable en el punto $O(0, 0)$ la función

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0$$

y $f(0, 0) = 0$.

Hallar las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.
3215. $u = \frac{x}{y^2}$.
3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
3217. $u = x\sin(x + y)$.
3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.
3219. $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.
3220. $u = x^y$.
3221. $u = \ln(x + y^2)$.
3222. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3223. $u = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$.
3224. $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.
3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.
3228. $u = x^{y^z}$.

3229. Comprobar la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

si

a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; b) $u = x^{y^z}$; c) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

3230. Sea $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, si $x^2+y^2 \neq 0$ y $f(0, 0) = 0$. Comprobar que

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

3230.1. ¿Existe $f''_{xy}(0, 0)$, si

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x^2+y^2 > 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

3231. Sea $u = f(x, y, z)$ una función homogénea de grado n. Comprobar el teorema de Euler de las funciones homogéneas en los siguientes ejemplos:

a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; c) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

3232. Demostrar que, si una función diferenciable $u = f(x, y, z)$ satisface a la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

entonces ésta es una función homogénea de grado n.

Indicación. Examinar la función auxiliar

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. Demostrar que, si $f(x, y, z)$ es una función diferenciable homogénea de grado n, sus derivadas parciales $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ son funciones homogéneas de grado $n-1$.

3234. Sea $u = f(x, y, z)$ una función homogénea de grado n, dos veces diferenciable. Demostrar que

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Hallar las diferenciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes):

3235. $u = x^m y^n$.

3236. $u = \frac{x}{y}$.

3237. $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

3238. $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3239. $u = e^{xy}$.

3240. $u = xy + yz + zx$.

3241. $u = \frac{z}{x^2+y^2}$.

3242. Hallar $df(1, 1, 1)$ y $d^2f(1, 1, 1)$, si

$$f(x, y, z) = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}.$$

3243. Comprobar que, si

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

se tiene $d^2u \geqslant 0$.

3244. Suponiendo que x, y son pequeños en valor absoluto, deducir unas fórmulas de aproximación para las siguientes expresiones:

a) $(1+x)^m(1+y)^n$;

b) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$;

c) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

3245. Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, calcular aproximadamente

a) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$;

b) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

c) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$;

d) $\sin 29°\cdot \operatorname{tg} 46°$;

e) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. ¿Cuánto variará la diagonal y el área de un rectángulo de lados $x = 6$ m e $y = 8$ m, si el primer lado se aumenta en 2 mm y el segundo se disminuye en 5 mm?

3247. El ángulo central de un sector $\alpha = 60°$ aumentó $\Delta\alpha = 1°$. ¿Cuánto hay que disminuir el radio del sector $R = 20$ cm, para que su área no varíe?

3248. Demostrar que el error relativo del producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

3249. Al medir el radio R de la base y la altura H de un cilindro se obtuvieron los siguientes resultados:

$$R = 2{,}5 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}; \qquad H = 4{,}0 \text{ m} \pm 0{,}2 \text{ m}.$$

¿Con qué error absoluto Δ y error relativo δ se puede calcular el volumen del cilindro?

3250. Los lados de un triángulo son: $a = 200$ m $\pm$ 2 m, $b = 300$ m $\pm$ $\pm$ 5 m, y el ángulo formado por ellos es $C = 60° \pm 1°$. ¿Con qué error absoluto puede calcularse el tercer lado c del triángulo?

3251. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

es continua en el punto $(0, 0)$ y tiene en este punto ambas derivadas parciales $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$, sin embargo, no es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

Estudiar el comportamiento de las derivadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0).

3252. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{si} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

y

$$f(0, 0) = 0,$$

es continua y tiene derivadas parciales acotadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0), sin embargo, esta función no es diferenciable en el punto (0, 0).

3253. Comprobar que la función

$$f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{si} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

y

$$f(0, 0) = 0,$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0), las cuales son discontinuas en este punto y no están acotadas en cualquier entorno del mismo; a pesar de esto, la función es diferenciable en el punto (0, 0).

3254. Demostrar que una función $f(x, y)$ que tiene derivadas parciales acotadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un recinto convexo E, es uniformemente continua en este recinto.

3255. Demostrar que, si una función $f(x, y)$ es continua respecto de la variable x para cada valor fijado de y, y tiene derivada acotada $f'_y(x, y)$ respecto de la variable y, entonces esta función es continua respecto del conjunto de las variables x e y.

Hallar las derivadas parciales indicadas en los siguientes ejercicios:

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, si $u = x\ln(xy)$.

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, si $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, si $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, si $u = e^{xyz}$.

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, si $u = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, si $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$.

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, si $u = \frac{x+y}{x-y}$.

3264. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, si $u = (x^2+y^2)e^{x+y}$.

3265. $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, si $u = xyze^{x+y+z}$.

3266. Hallar $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0, 0)$, si $f(x, y) = e^x \sin y$.

3267. Comprobar que, si

$$u = f(xyz),$$

se tiene

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

donde $t = xyz$, y hallar la función F.

3268. Hallar $d^4 u$, si $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$.

¿A qué son iguales las derivadas $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ y $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Hallar las diferenciales totales del orden indicado en los siguientes ejercicios:

3269. d^3u, si $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$.
3270. d^2u, si $u = \sin(x^2+y^2)$.
3271. $d^{10}u$, si $u = \ln(x+y)$.
3272. d^6u, si $u = \cos x \operatorname{ch} y$.
3273. d^3u, si $u = xyz$.
3274. d^4u, si $u = \ln(x^x y^y z^z)$.
3275. d^nu, si $u = e^{ax+by}$.
3276. d^nu, si $u = X(x)Y(y)$.
3277. d^nu, si $u = f(x+y+z)$.
3278. d^nu, si $u = e^{ax+by+cz}$.

3279. Sea $P_n(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado n. Demostrar que

$$d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz).$$

3280. Sea

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hallar Au y $A^2u = A(Au)$, si

a) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; b) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Sea

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Hallar Δu, si

a) $u=\sin x \operatorname{ch} y$; b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3282. Sea

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

y

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Hallar $\Delta_1 u$ y $\Delta_2 u$, si

a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$; b) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Hallar las derivadas de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones compuestas:

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$. 3284. $u=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

3285. $u=f(x, xy, xyz)$.

3286. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, si

$$u=f(x+y, xy).$$

3287. Hallar

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

si

$$u=f(x+y+z,\quad x^2+y^2+z^2).$$

Hallar las diferenciales totales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones compuestas (x, y, z son variables independientes):

3288. $u=f(t)$, donde $t=x+y$. 3291. $u=f(t)$, donde $t=xyz$.

3289. $u=f(t)$, donde $t=\frac{y}{x}$. 3292. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3293. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=ax$, $\eta=by$.

3294. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

3295. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=xy$, $\eta=\frac{x}{y}$ 3296. $u=f(x+y, z)$.

3297. $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$. 3298. $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u=f(x, y, z)$, donde $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

3300. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

3301. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$.

Hallar $d^n u$, si:

3302. $u=f(ax+by+cz)$. 3303. $u=f(ax, by, cz)$.

3304. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

3305. Sea $u=f(r)$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y f es una función dos veces diferenciable. Comprobar que

$$\Delta u=F(r),$$

donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace, y hallar la función F.

3306. Sean u y v funciones dos veces diferenciables y Δ el operador de Laplace (véase el problema 3305). Demostrar que

$$\Delta(uv)=u\,\Delta v+v\,\Delta u+2\Delta(u, v),$$

donde

$$\Delta(u, v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Comprobar que la función

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a y b son constantes) satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. Demostrar que, si la función $u=u(x, y)$ satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3307), la función

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

también satisface a esta ecuación.

3309. Comprobar que la función

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a y b son constantes) satisface a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Demostrar que, si la función $u = u(x, t)$ satisface a la ecuación del calor (véase el problema 3309), la función

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^4 t}\right) \qquad (t > 0)$$

también satisface a esta ecuación.

3311. Demostrar que la función

$$u = \frac{1}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, satisface a la ecuación de Laplace

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

para $r \neq 0$.

3312. Demostrar que, si la función $u = u(x, y, z)$ satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3311), la función

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right),$$

donde k es una constante y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, también satisface a esta ecuación.

3313. Demostrar que la función

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y C_1, C_2 son constantes, satisface a la ecuación de Helmholz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. Supongamos que las funciones $u_1 = u_1(x, y, z)$ y $u_2 = u_2(x, y, z)$ satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$.
Demostrar que la función

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) u_2(x, y, z)$$

satisface a la ecuación biarmónica

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. Sea $f(x, y, z)$ una función homogénea, de grado n, y m veces diferenciable.
Demostrar que

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\ldots(n-m+1) f(x, y, z).$$

3316. Simplificar la expresión

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y},$$

si

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

donde f es una función diferenciable.

3317. Comprobar que la función

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. Comprobar que

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. Simplificar la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

si

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2 yz + f(y-x, z-x),$$

donde f es una función diferenciable.

3320. Sea

$$x^2 = vw, \ y^2 = uw, \ z^2 = uv$$

y

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

Demostrar que

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

Suponiendo que las funciones arbitrarias φ, ψ, etc., son diferenciables un número suficiente de veces, comprobar las siguientes igualdades:

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$ si $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0,$ si $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

3323. $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz,$ si $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$ si $u = x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z},$ si $u = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ si $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$.

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ si $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$

si $u = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3330. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

Mediante la derivación sucesiva, eliminar las funciones arbitrarias φ y ψ:

3331. $z = x + \varphi(xy)$.

3332. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3334. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

3335. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

3337. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.

3339. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. Hallar la derivada de la función

$$z = x^2 - y^2$$

en el punto $M(1, 1)$, en la dirección l que forma el ángulo $\alpha = 60°$ con la dirección positiva del eje Ox.

3342. Hallar la derivada de la función

$$z = x^2 - xy + y^2$$

en el punto $M(1, 1)$ en la dirección l que forma un ángulo α con la dirección positiva del eje Ox. ¿En qué dirección esta derivada: a) alcanza el valor máximo; b) alcanza el valor mínimo; c) es igual a 0.

3343. Hallar la derivada de la función

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

en el punto $M(x_0, y_0)$ en la dirección que es perpendicular a la línea de nivel que pasa por este punto.

3344. Hallar la derivada de la función

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

en el punto $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, en dirección de la normal interior a la curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

en este punto.

3345. Hallar la derivada de la función

$$u = xyz$$

en el punto $M(1, 1, 1)$, en la dirección $l\{\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma\}$.

¿A qué es igual la magnitud del gradiente de la función en este punto?

3346. Hallar la magnitud y la dirección del gradiente de la función

$$u=\frac{1}{r},$$

en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0), donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3347. Determinar el ángulo formado por los gradientes de la función

$$u=x^2+y^2-z^2$$

en los puntos A $(\epsilon, 0, 0)$ y B $(0, \epsilon, 0)$.

3348. ¿Cuánto se diferencia la magnitud del gradiente de la función

$$u=x+y+z$$

en el punto M (1, 2, 2) de la magnitud del gradiente de la función

$$v=x+y+z+0{,}001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})?$$

en el mismo punto?

3349. Comprobar que en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0), el ángulo formado por los gradientes de las funciones

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

y

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a, b, c, m, n, p son constantes y $a^2+b^2+c^2\neq 0$) tiende a cero cuando el punto M_0 se aleja al infinito.

3350. Sea $u=f(x, y, z)$ una función dos veces diferenciable. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la dirección l.

3351. Sea $u=f(x, y, z)$ una función dos veces diferenciable y

$$l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\},\quad l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$$

tres direcciones perpendiculares entre sí.

Demostrar que:

a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. Sea $u=u(x, y)$ una diferenciable, tal que para $y=x^2$ se tiene:

$$u(x, y)=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial y}$ para $y=x^2$.

3353. Supongamos que la función $u=u(x, y)$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

y también a las siguientes condiciones:

$$u(x, 2x)=x, \quad u'_x(x, 2x)=x^2.$$

Hallar

$$u''_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x).$$

Suponiendo que $z=z(x, y)$, resolver las siguientes ecuaciones:

3354. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$. 3355. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$. 3356. $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

3357. Suponiendo que $u=u(x, y, z)$, resolver la ecuación

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.$$

3358. Hallar la solución $z=z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,$$

que satisface a la condición: $z(x, x^2)=1$.

3359. Hallar la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

que cumple las condiciones: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

3360. Hallar la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = x + y,$$

que cumple las condiciones: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

§ 3. Derivación de las funciones implícitas

1.° Teorema de existencia. Si: 1) la función $F(x, y, z)$ se anula en un punto A_0 (x_0, y_0, z_0); 2) $F(x, y, z)$ y $F'_z(x, y, z)$ están definidas y son continuas en un entorno del punto A_0; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces en cierto entorno suficientemente pequeño del punto A_0 (x_0, y_0) existe una función uniforme continua única

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

que satisface a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

y tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2.° Diferenciabilidad de la función implícita. Si, además, 4) la función $F(x, y, z)$ es diferenciable en un entorno del punto A_0 (x_0, y_0, z_0), entonces la función (1) es diferenciable en un entorno del punto A_0 (x_0, y_0) y sus derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ pueden hallarse por las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Si la función $F(x, y, z)$ es diferenciable un número suficiente de veces, entonces, derivando sucesivamente las igualdades (2) pueden calcularse también las derivadas de orden superior de la función z.

3.° Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones. Supongamos que las funciones $F_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cumplen las condiciones siguientes:

1) se anulan en el punto $\tilde{A}_0(x_{10}, \ldots, x_{m0}; y_{10}, \ldots, y_{n0})$,

2) son diferenciables en un entorno del punto $\tilde{A}_0$.

3) el determinante funcional $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ en el punto A_0.

Entonces, el sistema de ecuaciones

$$F_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

determina unívocamente en un entorno del punto $A_0(x_{10}, \ldots, x_{m0})$ un sistema de funciones diferenciables

$$y_i = f(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que satisfacen a las ecuaciones (3) y a las condiciones

$$f_i(x_{10}, \ldots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Las diferenciales de estas funciones implícitas pueden hallarse mediante el sistema

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$*).

Problemas:

3361. Comprobar que la función de Dirichlet

$$y = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

que es discontinua en cada punto, satisface a la ecuación

$$y^2 - y = 0$$

3362. Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo (a, b). ¿En qué caso la ecuación

$$f(x)y = 0$$

tiene la solución continua única $y = 0$ para $a < x < b$?

*) En los enunciados de la mayoría de los problemas de este capítulo se supone, sin reservas, que se cumplen las condiciones de existencia de las funciones implícitas y de sus derivadas correspondientes.

3363. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son continuas en el intervalo (a, b). ¿En qué caso la ecuación

$$f(x)\,y = g(x)$$

tiene una solución continua única en el intervalo (a, b)?

3364. Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

sea

$$y = y(x) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (2)$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1).

1) ¿Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)?
2) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)?
3) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1), si: $y(0) = 1$; b) $y(1) = 0$?

3365. Dada la ecuación

$$x^2 = y^2 \qquad (1)$$

sea

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (2)$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1).

1) ¿Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)?
2) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)?
3) ¿Cuántas funciones uniformes diferenciables (2) satisfacen a la ecuación (1)?
4) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1), si: a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$?
5) ¿Cuántas funciones uniformes continuas $y = y(x)(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ satisfacen a la ecuación (1), si $y(1) = 1$ y δ es suficientemente pequeño?

3366. La ecuación

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

determina a y como función multiforme de x. ¿En qué regiones esta función: 1) es uniforme, 2) es biforme, 3) es triforme, 4) es tetraforme? Determinar los puntos de ramificación de esta función y sus ramas uniformes continuas.

3367. Determinar los puntos de ramificación y las ramas uniformes continuas $y = y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ de la función multiforme y, definida por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

3368. Supongamos que $f(x)$ es continua para $a < x < b$ y que $\varphi(y)$ es monótona creciente y continua para $c < y < d$. ¿En qué caso la ecuación

$$\varphi(y) = f(x)$$

determina la función uniforme

$$y = \varphi^{-1}(f(x))?$$

Examinar los ejemplos: a) $\operatorname{sen} y + \operatorname{sh} y = x$; b) $e^{-y} = -\operatorname{sen}^2 x$.

3369. Sea

$$x = y + \varphi(y), \qquad (1)$$

donde $\varphi(0) = 0$ y $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$ para $-a < y < a$. Demostrar que, para $-\epsilon < x < \epsilon$, existe una función diferenciable única $y = y(x)$ que satisface a la ecuación (1) y tal que $y(0) = 0$.

3370. Sea $y = y(x)$ una función implícita determinada por la ecuación

$$x = ky + \varphi(y),$$

donde la constante $k \neq 0$ y $\varphi(y)$ es una función diferenciable periódica, de período ω, tal que $|\varphi'(y)| < |k|$. Demostrar que

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

donde $\psi(x)$ es una función periódica, de período $|k|\,\omega$.

Hallar y' e y'' para las funciones y, determinadas por las siguientes ecuaciones:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. **3372.** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1)$.

3374. $x^y = y^x \quad (x \neq y)$. **3375.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$y = f(x)$

3376. Demostrar que, para

$$1+xy=k(x-y),$$

donde k es una constante, se verifica la igualdad

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Demostrar que, si

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

entonces, para $xy>0$ se verifica la igualdad

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. Demostrar que, en un entorno del punto $x=0$, $y=0$, la ecuación

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \qquad (a\neq 0)$$

determina dos funciones diferenciables: $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$. Hallar $y_1'(0)$ e $y_2'(0)$.

3379. Hallar y' para $x=0$ e $y=0$, si

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3.$$

3380. Hallar y', y'', y''', si $x^2+xy+y^2=3$.

3381. Hallar y', y'', y''' para $x=0$, $y=1$, si

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0.$$

3382. Demostrar que para la curva de 2° orden

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

se verifica la igualdad

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

Hallar, para la función $z=z(x, y)$, las derivadas parciales de primero y segundo órdenes, si:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

3385. $x+y+z=e^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

3388. Sea

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \qquad (1)$$

y

$$f(x, y, z)=xy^2z^3.$$

Hallar: a) $f_x'(1, 1, 1)$, si $z=z(x, y)$ es la función implícita determinada por la ecuación (1); b) $f_x'(1, 1, 1)$, si $y=y(x, z)$ es la función implícita determinada por la ecuación (1). Explicar por qué estas derivadas son distintas.

3389. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ para $x=1$, $y=-2$, $z=1$, si $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$.

Hallar dz y d^2z, si:

3390. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3391. $xyz=x+y+z$.

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$.

3393. $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

3394. Hallar du, si

$$u^3-3(x+y)u^2+z^3=0.$$

3395. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, si $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

3396. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$.

3397. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $F(x,\ x+y,\ x+y+z)=0$.

3398. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $F(xz, yz)=0$.

3399. Hallar d^2z, si

a) $F(x+z,\ y+z)=0$; b) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$.

3399.1. Sea $z=z(x, y)$ la función diferenciable, determinada por la ecuación

$$z^3-xz+y=0,$$

que para $x=3$, $y=-2$ toma el valor $z=2$. Hallar $dz(3, -2)$ y $d^2z(3, -2)$.

3400. Sean $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$ funciones definidas por la ecuación $F(x, y, z)=0$.

Demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401. Hallar $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$, si $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

3402. Hallar $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ y $\frac{d^2y}{dz^2}$ para $x=1$, $y=-1$, $z=2$, si $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$.

3403. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, si $xu-yv=0$, $yu+xv=1$.

3403.1. El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} xe^{u+v}+2uv=1,\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x \end{array}\right\}$$

determina unas funciones diferenciables $u=u\,(x, y)$ y $v=v\,(x, y)$ tales que $u\,(1, 2)=0$ y $v\,(1; 2)=0$. Hallar $du\,(1, 2)$ y $dv\,(1, 2)$.

3404. Hallar du, dv, d^2u, d^2v, si

$$u+v=x+y,\quad \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}.$$

3405. Hallar du, dv, d^2u y d^2v para $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, si

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},\quad e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

3406. Sean

$$x=t+t^{-1},\quad y=t^2+t^{-2},\quad z=t^3+t^{-3}.$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. ¿En qué región del plano Oxy el sistema de ecuaciones

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3,$$

donde los parámetros u y v toman todos los valores reales posibles, determina a z como función de las variables x e y? Hallar las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3407.1. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $u=1$, $v=1$, si:

$$\left.\begin{array}{l} x=u+\ln v,\\ y=v-\ln u,\\ z=2u+v. \end{array}\right\}$$

3407.2. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ en el punto $u=2$, $v=1$, si:

$$\left.\begin{array}{l} x=u+v^2,\\ y=u^2-v^3\\ z=2uv. \end{array}\right\}$$

3408. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si

$$x=\cos\varphi\cos\psi,\quad y=\cos\varphi\sin\psi,\quad z=\sin\varphi.$$

3409. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v.$$

3410. Supongamos que $z=z\,(x, y)$ es una función que se determina por el sistema de ecuaciones:

$$x=e^{u+v},\quad y=e^{u-v},\quad z=uv$$

(u y v son parámetros). Hallar dz y d^2z para $u=0$, $v=0$.

3411. Hallar $\frac{dz}{dx}$ y $\frac{d^2z}{dx^2}$, si

$$z=x^2+y^2,$$

donde $y=y\,(x)$ se determina por la ecuación

$$x^2-xy+y^2=1.$$

3412. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, si

$$u=\frac{x+z}{y+z},$$

donde z se determina por la ecuación

$$ze^z = xe^x + ye^y.$$

3413. Supongamos que las ecuaciones

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

determinan a z como función de x e y. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. Sean

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Hallar las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de las funciones inversas: $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

3415. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, si:

a) $x = u\cos\frac{v}{u}$, $y = u\sin\frac{v}{u}$; b) $x = e^u + u\sin v$, $y = e^u - u\cos v$.

3416. La función $u = u(x)$ se determina por el sistema de ecuaciones:

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

Hallar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. La función $u = u(x, y)$ se determina por el sistema de ecuaciones:

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0.$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Sean

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Supongamos que la función $z = z(x, y)$ satisface al sistema de ecuaciones

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0,$$

donde t es un parámetro variable. Hallar dz.

3420. Sea $u = f(z)$, donde z es una función implícita de las variables x e y, determinada por la ecuación $z = x + y\varphi(z)$.

Demostrar la fórmula de Lagrange

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Indicación. Demostrar la fórmula para $n = 1$ y aplicar el método de inducción matemática.

3421. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, determinada por la ecuación

$$\Phi(x - az, \ y - bz) = 0, \tag{1}$$

donde $\Phi(u, v)$ es una función diferenciable arbitraria de las variables u y v (a y b son constantes), es solución de la ecuación

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Averiguar las propiedades geométricas de la superficie (1).

3422. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, determinada por la ecuación

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0, \tag{2}$$

donde $\Phi(u, v)$ es una función diferenciable arbitraria de las variables u y v, satisface a la ecuación

$$(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

Averiguar las propiedades geométricas de la superficie (2).

3423. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, determinada por la ecuación

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \tag{3}$$

donde $\Phi(u)$ es una función diferenciable arbitraria de la variable u, y a, b, c son constantes, satisface a la ecuación

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Averiguar las propiedades geométricas de la superficie (3).

3424. La función $z = z(x, y)$ viene dada por la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

Comprobar que

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

3425. La función $z = z(x, y)$ viene dada por la ecuación

$$F(x+zy^{-1},\quad y+zx^{-1})=0.$$

Comprobar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

3426. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, determinada por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z&=f(\alpha),\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha&=f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

donde $\alpha = \alpha(x, y)$ es un parámetro variable y $f(\alpha)$ es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

3427. Comprobar que la función

$$z=z(x, y),$$

dada por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z&=\alpha x+\frac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\ 0&=x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

3428. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} [z-f(\alpha)]^2&=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)&=\alpha x^2,\end{aligned}\right\}$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

3429. Comprobar que la función $z = z(x, y)$, dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z&=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\ 0&=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

3430. Comprobar que la función implícita $z = z(x, y)$, determinada por la ecuación

$$y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

satisface a la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

§ 4. Cambio de variables

1.° *Cambio de variables en una expresión que contiene derivadas ordinarias.* Supongamos que en la expresión diferencial

$$A=\Phi(x,\ y,\ y'_x,\ y''_{xx},\ \ldots)$$

se necesita pasar a las nuevas variables: t será la variable independiente y u la función, que están ligadas con las variables anteriores x e y por las ecuaciones

$$x=f(t,\ u),\quad y=g(t,\ u). \tag{1}$$

Derivando las ecuaciones (1), se obtiene

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}$$

Análogamente se expresan las derivadas superiores y''_{xx}, ... Definitivamente, resulta:

$$A=\Phi_1(t,\ u,\ u'_t,\ u''_{tt},\ \ldots).$$

2.° *Cambio de las variables independientes en una expresión que contiene derivadas parciales.* Si en la expresión diferencial

$$B=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\right)$$

se hace

$$x=f(u,\ v),\ y=g(u,\ v),\qquad (2)$$

donde u y v son nuevas variables independientes, entonces las derivadas parciales sucesivas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... se hallan de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

etc.

3.° *Cambio de las variables independientes y de la función en una expresión que contiene derivadas parciales.* En el caso más general, si se tienen las ecuaciones

$$x=f(u,\ v,\ w),\ y=g(u,\ v,\ w),\quad z=h(u,\ v,\ w),\qquad (3)$$

donde u y v son nuevas variables independientes y $w=w\ (u,\ v)$ es la nueva función, entonces, para las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

etc.

En algunos casos de cambio de variables, es conveniente utilizar las diferenciales totales.

Problemas:

3431. Transformar la ecuación

$$y'y'''-3y''^2=x,$$

tomando y por nueva variable independiente.

3432. Transformar del mismo modo la ecuación

$$y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3=0.$$

3433. Transformar la ecuación

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0,$$

tomando x por función y $t=xy$ por variable independiente.

Introduciendo nuevas variables, transformar las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

3434. $x^2y''+xy'+y=0$, si $x=e^t$.

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$, si $t=\ln|x|$.

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, si $x=\cos t$.

3437. $y''+y'\,\mathrm{th}\,x+\frac{m^2}{\mathrm{ch}^2 x}y=0$, si $x=\ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}$.

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, si $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}$ y $p(x)\in C^{(1)}$

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$, si $x=e^t$, $y=ue^{2t}$, donde $u=u(t)$.

3440. $(1+x^2)^2y''=y$, si $x=\mathrm{tg}\,t$, $y=\frac{u}{\cos t}$, donde $u=u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2y''=-y$, si $x=\mathrm{th}\,t$, $y=\frac{u}{\mathrm{ch}\,t}$, donde $u=u(t)$.

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$, si $x=u+t$, $y=u-t$, donde $u=u(t)$.

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0$, si $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{u}{t}$, donde $u=u(t)$.

3444. Transformar la ecuación de Stokes

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

haciendo

$$u=\frac{y}{x-b},\quad t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

y tomando u por función de la variable t.

3445. Comprobar que si se transforma la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

mediante la sustitución $x=\varphi(\xi)$, en la ecuación

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0,$$

entonces

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. En la ecuación

$$\Phi(y, y', y'')=0,$$

donde Φ es una función homogénea de las variables y, y', y'', hacer

$$y=e^{\int_{x_0}^{x} u\,dx}$$

3447. En la ecuación

$$F(x^2y'', xy', y)=0,$$

donde F es una función homogénea de sus argumentos, hacer

$$u=x\frac{y'}{y}.$$

3448. Demostrar que la ecuación

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

no cambia de forma al hacer una transformación homográfica

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c}, \qquad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}.$$

Indicación. Expresar la transformación dada en forma de una composición de las transformaciones elementales:

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma, \quad y=Y;$$
$$X=\frac{1}{X_1}, \qquad Y=\frac{Y_1}{X_1}$$

y

$$X_1=a\xi+b\eta+c, \quad Y_1=a_2\xi+b_2\eta+c_2.$$

3449. Demostrar que el Schwarziano

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

no cambia su valor al hacer una transformación lineal fraccionaria

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d} \qquad (ad-bc\neq 0).$$

Transformar a coordenadas polares r y φ, haciendo $x = r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, las siguientes ecuaciones:

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

3453. Transformar a coordenadas polares la expresión

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}.$$

3454. Expresar la curvatura de una curva plana

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

en coordenadas polares r y φ.

3455. Pasar a coordenadas polares en el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2), \quad \frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)$$

3456. Transformar la expresión

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2},$$

introduciendo nuevas funciones $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3457. En la transformación de Legendre, a cada punto (x, y) de la curva $y=y(x)$ se le pone en correspondencia el punto (X, Y), donde

$$X=y', \quad Y=xy'-y.$$

Hallar Y', Y'', Y'''.

Introduciendo nuevas variables independientes ξ y η, resolver las siguientes ecuaciones:

3458. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, si $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

3459. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, si $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

3460. $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, si $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

3461. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, si $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$.

Tomando u y v por nuevas variables independientes, transformar las siguientes ecuaciones:

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y} = xy$, si

$u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, si

$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, si

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3465. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$ si

$$u = 2x - z^2, \quad v = \frac{y}{z}.$$

3466. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, si

$$u = x + z, \quad v = y + z.$$

3467. Transformar la expresión

$$(z + e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}),$$

tomando por nuevas variables independientes

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}.$$

3468. Transformar la expresión

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

haciendo

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

3469. En la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

hacer

$$\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x.$$

3470. Transformar la ecuación

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

tomando x por función e y, z por variables independientes.

3471. Transformar la ecuación

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

tomando x por función y

$$u = y - z, \quad v = y + z$$

por variables independientes.

3472. Transformar la expresión

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

tomando x por función y

$$u = xz, \quad v = yz$$

por variables independientes.

3473. En la ecuación

$$(y + z + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u)\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

hacer

$$e^\xi = x - u, \quad e^\eta = y - u, \quad e^\zeta = z - u.$$

Pasar a las nuevas variables u, v, w, donde $w = w(u, v)$, en las siguientes ecuaciones:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, si

$$u=x^2+y^2, \quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \quad w=\ln z-(x+y).$$

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, si

$$u=x, \quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, \quad w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, si

$$u=yz-x, \quad v=xz-y, \quad w=xy-z.$$

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x=ue^w, \quad y=ve^w, \quad z=we^w.$$

3478. Transformar la expresión

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

haciendo

$$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad v=\operatorname{arctg} z, \quad w=x+y+z,$$

donde $w=w(u, v)$.

3479. Transformar la expresión

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y},$$

haciendo $u=xe^z$, $v=ye^z$, $w=ze^z$, donde $w=w(u, v)$.

3480. En la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

hacer $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$, donde $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

Transformar a coordenadas polares r y φ, haciendo $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, las siguientes expresiones:

3481. $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$.

3482. $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3487. En la expresión

$$I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

hacer $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

3488. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

introduciendo las nuevas variables independientes

$$\xi=x-at, \quad \eta=x+at.$$

Tomando u y v por nuevas variables independientes, transformar las siguientes ecuaciones:

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$, si

$$u=x+2y+2, \quad v=x-y-1.$$

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, si

$$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \quad v=\ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$

3491. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a, b, c son constantes), si

$$u=\ln x, \quad v=\ln y.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, si

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$, si

$$x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, si

$$u=x-2\sqrt{y}, \quad v=x+2\sqrt{y}.$$

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, si

$$u=xy, \quad v=\frac{x}{y}.$$

3496. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, si

$$u = x + y \quad , \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

3497. $xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, si

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad , \quad v = xy.$$

3498. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, si

$$u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \quad , \quad v = x.$$

3499. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0,\ y > 0)$, si

$$x = (u + v)^2 \quad , \quad y = (u - v)^2.$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$, si

$$u = x \quad , \quad v = y + z.$$

3501. Mediante el cambio lineal

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

transformar la ecuación

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

donde A, B y C son constantes y $AC - B^2 < 0$, a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Hallar la forma general de una función que satisface a la ecuación (1).

3502. Demostrar que la forma de la ecuación de Laplace

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

no varía al hacer cualquier sustitución no degenerada de variables

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

que cumpla las condiciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

3503. Transformar las ecuaciones

$$\text{a) } \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \text{b) } \Delta(\Delta u) = 0,$$

haciendo $u = f(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3504. ¿Qué forma toma la ecuación

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0,$$

si se hace

$$w = f(u),$$

donde $u = (x - x_0)(y - y_0)$?

3505. Transformar la expresión

$$A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x},$$

haciendo

$$x + y = X, \quad y = XY.$$

3506. Comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0$$

no cambia su forma al hacer la transformación de variables

$$x = uv \quad , \quad y = \frac{1}{v}.$$

3507. Comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

no cambia su forma al hacer el cambio de variables

$$u = x + z \quad , \quad v = y + z.$$

3508. Transformar la ecuación

$$xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+yz\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+xz\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=0,$$

haciendo

$$x=\eta\zeta,\quad y=\xi\zeta,\quad z=\xi\eta.$$

3509. Transformar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_3}=0,$$

haciendo

$$y_1=x_2+x_3-x_1,\quad y_2=x_1+x_3-x_2,\quad y_3=x_1+x_2-x_3.$$

3510. Transformar la ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2xz\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+2yz\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0,$$

haciendo

$$\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z.$$

Indicación. Escribir la ecuación en la forma $A^2u-Au=0$, donde

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. Transformar las expresiones

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

y

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

a coordenadas esféricas, haciendo

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

Indicación. Expresar el cambio de variables en forma de la composición de dos sustituciones parciales

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi,\quad z=z$$

y

$$R=r\sin\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

3512. En la ecuación

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

introducir una nueva función w, haciendo $w=z^2$.

Tomando u y v por nuevas variables independientes y $w=w(u, v)$ por nueva función, transformar las siguientes ecuaciones:

3513. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$, si $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$.

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, si $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$.

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, si $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$.

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$, si $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, $w=ze^y$.

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, si

$$u=x,\quad v=x+y,\quad w=x+y+z.$$

3518. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x=\sin u$, $y=\sin v$, $z=e^w$.

3519. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0$ $(|x|<1)$, si $u=\frac{1}{2}(y+\arccos x)$, $v=\frac{1}{2}(y-\arccos x)$, $w=z\sqrt[4]{1-x^2}$.

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\,\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ $(|x|>|y|)$, si $u=x+y$, $v=x-y$, $w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3521. Demostrar que toda ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a, b, c son constantes) mediante la sustitución

$$z=ue^{\alpha x+\beta y},$$

donde α y β son constantes y $u=u(x, y)$, se puede reducir a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c_1u=0\quad (c_1=\text{const}).$$

3522. Comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

no cambia su forma al hacer la sustitución de variables

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=-\frac{1}{y},\quad u=\frac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

donde u' es una función de las variables x', y'.

3523. En la ecuación

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

donde $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, hacer $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$, considerando que $w=w(u, v)$.

3524. En la ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

hacer $x=e^{\xi}$, $y=e^{\eta}$, $z=e^{\zeta}$, $u=e^{w}$, donde $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

3525. Comprobar que la forma de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$$

no varía, cualquiera que sea el papel que desempeñen las variables x, y, z entre sí.

3526. Resolver la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

tomando x por función de las variables y y z.

3527. Transformar la ecuación

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

aplicando la transformación de Legendre

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

donde $Z=Z(X, Y)$.

§ 5. Aplicaciones geométricas

1.° *Recta tangente y plano normal.* Las ecuaciones de la recta tangente a la curva

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

en su punto $M(x, y, z)$, tienen la forma

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

La ecuación del plano normal en este punto es:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2.° *Plano tangente y recta normal.* La ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x, y)$ en su punto $M(x, y, z)$, tiene la forma

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

Las ecuaciones de la normal en el punto M, son:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma implícita $F(x, y, z)=0$, entonces, se tiene respectivamente: la ecuación del plano tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

y las ecuaciones de la normal

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

3.° *Curva envolvente de una familia de curvas planas.* La curva envolvente de una familia monoparamétrica de curvas $f(x, y, \alpha) = 0$ (α es un parámetro), satisface al sistema de ecuaciones:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4.° *Superficie envolvente de una familia de superficies.* La superficie envolvente de una familia monoparamétrica de superficies $F(x, y, z, \alpha) = 0$ satisface al sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

En caso de una familia biparamétrica de superficies $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, la superficie envolvente satisface a las siguientes ecuaciones:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Problemas:

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes y planos normales en los puntos dados a las siguientes curvas:

3528. $x = a \cos \alpha \cos t$, $y = a \sin \alpha \cos t$, $z = a \sin t$; en el punto $t = t_0$.

3529. $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$; en el punto $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x$, $z = x^2$; en el punto $M(1, 1, 1)$.

3531. $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$; en el punto $M(1, 1, 3)$.

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$; en el punto $M(1, -2, 1)$.

3533. Hallar un punto en la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, de modo que la recta tangente en éste sea paralela al plano $x + 2y + z = 4$.

3534. Demostrar que la recta tangente a la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ forma un ángulo constante con el eje Oz.

3535. Demostrar que la curva

$$x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

corta a todas las generatrices del cono $x^2 + y^2 = z^2$ bajo un mismo ángulo.

3536. Demostrar que la loxodrómica

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{const}),$$

donde φ es la longitud y ψ la latitud del punto de la esfera, corta todos los meridianos de la esfera bajo un ángulo constante.

3537. Hallar la tangente del ángulo formado por la recta tangente a la curva

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha},$$

en el punto $M_0(x_0, y_0)$ y el plano Oxy, donde f es una función diferenciable.

3538. Hallar la derivada de la función

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

en el punto $M(1, 2, -2)$ en dirección de la recta tangente a la curva

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4.$$

en este punto.

Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados:

3539. $z = x^2 + y^2$; en el punto $M_0(1, 2, 5)$.

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; en el punto $M_0(3, 4, 12)$.

3541. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; en el punto $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; en el punto $M_0(1, 1, 1)$.

3544. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; en el punto $M_0(2, 2, 1)$.

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; en el punto $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

3546. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$; en el punto $M_0(\varphi_0, r_0)$.

3547. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$; en el punto $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Hallar la posición límite del plano tangente a la superficie

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

cuando el punto de contacto $M(u, v)$ $(u \neq v)$ se aproxima indefinidamente hacia el punto $M_0(u_0, u_0)$ de la línea del borde $u = v$ de la superficie.

3549. Hallar en la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

los puntos en los que los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados.

3550. ¿En qué punto del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la normal a éste forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

3551. Trazar los planos tangentes a la superficie

$$x^2+2y^2+3z^2=21$$

que son paralelos al plano

$$x+4y+6z=0.$$

3552. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^2$ $(a>0)$ forman con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante.

3553. Demostrar que los planos tangentes a la superficie

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a} \qquad (a>0)$$

cortan en los ejes coordenados segmentos cuyas sumas son constantes.

3554. Demostrar que los planos tangentes al cono

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

pasan por su vértice.

3555. Demostrar que las normales a la superficie de revolución

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (f'\neq 0)$$

se cortan con el eje de rotación.

3556. Hallar las proyecciones del elipsoide

$$x^2+y^2+z^2-xy=1$$

sobre los planos coordenados.

3557. El cuadrado $(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ se ha dividido en un número finito de partes σ de diámetro $\leqslant\delta$. Acotar superiormente el número δ, si las direcciones de las normales a la superficie

$$z=1-x^2-y^2$$

en cualesquiera puntos $P\ (x, y)$ y $P_1\ (x_1, y_1)$, pertenecientes a una misma parte σ, difieren menos de 1°.

3558. Sea

$$z=f(x, y), \text{ donde } (x, y)\in D, \tag{1}$$

la ecuación de una superficie y $\varphi(P_1, P)$ el ángulo formado por las normales a la superficie (1) en los puntos $P\ (x, y)\in D$ y $P_1(x_1, y_1)\in D$.

Demostrar que, si el recinto D está acotado y es cerrado y la función $f(x, y)$ tiene derivadas acotadas de 2° orden en el recinto D, entonces se verifica la desigualdad de Liapunov

$$\varphi(P_1, P)<C\rho(P_1, P), \tag{2}$$

donde C es una constante y $\rho\ (P_1, P)$ es la distancia entre los puntos P y P_1.

3559. ¿Bajo qué ángulo se cortan el cilindro $x^2+y^2=a^2$ con la superficie $bz=xy$ en el punto común $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$?

3560. Comprobar que las superficies coordenadas respectivas a las coordenadas esféricas

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ y=x\operatorname{tg}\varphi,\ x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$$

son ortogonales entre sí.

3561. Comprobar que las esferas

$$x^2+y^2+z^2=2ax,\ x^2+y^2+z^2=2by,\ x^2+y^2+z^2=2cz$$

forman un sistema triortogonal.

3562. Por cada punto $M\ (x, y, z)$ pasan, para $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$, tres superficies de segundo orden:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1 \qquad (a>b>c>0).$$

Demostrar que éstas son ortogonales entre sí.

3563. Hallar la derivada de la función $u=x+y+z$ en la dirección de la normal exterior a la esfera

$$x^2+y^2+z^2=1$$

en su punto $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$.

¿En qué puntos de la esfera la derivada normal de la función u tiene: a) el valor máximo, b) el valor mínimo, c) es igual a cero?

3564. Hallar la derivada de la función $u=x^2+y^2+z^2$ en la dirección de la normal exterior al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

en su punto $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$.

3565. Sean $\frac{\partial u}{\partial n}$ y $\frac{\partial v}{\partial n}$ las derivadas normales de las funciones u y v en un punto de la superficie $F(x, y, z)=0$. Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Hallar las envolventes de las familias monoparamétricas de las curvas planas:

3566. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ $(p = \text{const})$.

3567. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ $(a = \text{const})$. 3569. $y^2 = 2px + p^2$.

3570. Hallar la curva envuelta por un segmento de longitud l, cuyos extremos se deslizan sobre los ejes coordenados.

3571. Hallar la envolvente de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de área constante S.

3572. Hallar la envolvente de las trayectorias de un proyectil lanzado al vacío con una velocidad inicial v_0, al variar en el plano vertical el ángulo de lanzamiento α.

3573. Demostrar que la envolvente de las normales de una curva plana es la evoluta de esta curva.

3574. Averiguar el carácter de las curvas discriminantes de las familias de líneas siguientes (c es un parámetro variable).

a) parábolas cúbicas $y = (x - c)^3$;
b) parábolas semicúbicas $y^2 = (x - c)^3$;
c) parábolas de Neil $y^3 = (x - c)^2$;
d) estrofoides $(y - c)^2 = x^2 \dfrac{a - x}{a + x}$.

3575. Determinar la envolvente de la familia de esferas de radios r, cuyos centros están situados en la circunferencia $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$ (t es un parámetro, $R > r$).

3576. Hallar la envolvente de la familia de esferas

$$(x - t\cos\alpha)^2 + (y - t\cos\beta)^2 + (z - t\cos\gamma)^2 = 1,$$

donde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ y t es un parámetro variable.

3577. Determinar la envolvente de la familia de elipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

de volumen constante V.

3578. Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio ρ, cuyos centros están situados en la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

3579. Un punto luminoso está situado en el origen de coordenadas. Determinar el cono de la sombra arrojada por la esfera

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2,$$

si $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$.

3580. Hallar la envolvente de la familia de planos

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

si los parámetros p y q están ligados por la ecuación

$$p^2 + q^2 = 1.$$

§ 6. Fórmula de Taylor

1.° *Fórmula de Taylor.* Si la función $f(x, y)$ tiene en un entorno del punto (a, b) derivadas parciales continuas hasta el orden $n + 1$ inclusive, entonces en este entorno es válida la fórmula

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

donde

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(a + \theta_n(x-a),\ b + \theta_n(y-b))$$
$$(0 < \theta_n < 1).$$

2.° *Serie de Taylor.* Si la función $f(x, y)$ es infinitamente diferenciable y $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, y) = 0$, entonces esta función admite una expresión en forma de serie de potencias

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a, b)(x-a)^i(y-b)^j. \quad (2)$$

Los casos particulares de las fórmulas (1) y (2) para $a = b = 0$ se llaman fórmula de Mac-Laurin y serie de Mac-Laurin, respectivamente.

Subsisten unas fórmulas análogas para las funciones de más de dos variables.

3.° *Puntos singulares de las curvas planas.* Un punto $M_0(x_0, y_0)$ de una curva diferenciable $F(x, y) = 0$ se llama singular, si

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0$$

Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto singular aislado y supongamos que

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

no son todos iguales a cero. Si

1) $AC - B^2 > 0$, M_0 es un punto aislado;
2) $AC - B^2 < 0$, M_0 es un punto doble (nodo);
3) $AC - B^2 = 0$, M_0 es un punto de retroceso o un punto aislado.

En el caso $A = B = C = 0$, son posibles unos tipos más complicados de puntos singulares. Para las curvas que no pertenecen a la clase $C^{(2)}$, pueden encontrarse singularidades de naturaleza más complicada: puntos de interrupción, puntos angulosos, etc.

Problemas:

3581. Desarrollar la función $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ según la fórmula de Taylor en un entorno del punto $A(1, -2)$.

3582. Desarrollar la función $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ según la fórmula de Taylor en un entorno del punto $A(1, 1, 1)$.

3583. Hallar el incremento obtenido por la función $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$, al pasar de los valores $x = 1$, $y = -1$ a los valores $x_1 = 1 + h$, $y_1 = -1 + k$.

3584. Desarrollar $f(x + h, y + k, z + l)$ según las potencias enteras positivas de h, k, l, si:

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

3585. Escribir los términos hasta el segundo orden inclusive del desarrollo de la función

$$f(x, y) = x^y$$

en un entorno del punto $A(1, 1)$.

3586. Desarrollar la función

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

según la fórmula de Mac-Laurin hasta los términos de cuarto orden inclusive.

3587. Deducir unas fórmulas de aproximación con precisión hasta los términos de segundo orden para las expresiones:

$$\text{a) } \frac{\cos x}{\cos y}; \qquad \text{b) } \operatorname{arctg} \frac{1 + x + y}{1 - x + y},$$

si $|x|$ e $|y|$ son pequeños en comparación con 1.

3588. Simplificar la expresión

$$\cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z,$$

considerando que x, y, z son pequeños en valor absoluto.

3589. Desarrollar la función

$$F(x, y) = \frac{1}{4}[f(x + h, y) + f(x, y + h) + f(x - h, y) + f(x, y - h)] - f(x, y)$$

según las potencias de h con precisión hasta h^4.

3590. Sea $f(P) = f(x, y)$ y $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ los vértices de un triángulo regular inscrito en una circunferencia con el centro en el punto $P(x, y)$ y de radio ρ, siendo $x_1 = x + \rho$, $y_1 = y$. Desarrollar la función

$$F(\varrho) = \frac{1}{3}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)].$$

en potencias enteras positivas de ρ con exactitud hasta ρ^2.

3591. Desarrollar la función

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

según las potencias de h y k.

3592. Desarrollar la función

$$F(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \varrho \cos \varphi, \ y + \varrho \sin \varphi) \, d\varphi.$$

según las potencias de ρ.

Desarrollar en serie de Mac-Laurin las siguientes funciones:

3593. $f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$.
3594. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.
3595. $f(x, y) = e^x \sin y$.
3596. $f(x, y) = e^x \cos y$.
3597. $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.
3598. $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.
3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.
3600. $f(x, y) = \ln(1 + x) \ln(1 + y)$.

3601. Escribir tres términos del desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función

$$f(x, y) = \int_0^1 (1 + x)^{t^2 y} \, dt.$$

3602. Desarrollar la función e^{x+y} en serie de potencias enteras positivas de los binomios $x - 1$ e $y + 1$.

3603. Escribir el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en un entorno del punto $M(1, 1)$.

3604. Sea z la función implícita de x e y, determinada por la ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$, que para $x = 1, y = 1$ toma el valor $z = 1$.

Escribir unos cuantos términos del desarrollo de la función z en potencias crecientes de los binomios $x - 1$ e $y - 1$.

Estudiar los tipos de puntos singulares de las siguientes curvas y representar aproximadamente estas curvas:

3605. $y^2 = ax^2 + x^3$.
3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.
3608. $x^2 + y^4 = x^6$.
3609. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
3610. $(y - x^2)^2 = x^5$.
3611. $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$.

3612. Estudiar la forma de la curva $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ en dependencia de los valores de los parámetros a, b, c $(a \leqslant b \leqslant c)$.

Estudiar los puntos singulares de las curvas transcendentes:

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$.
3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.
3615. $y = x \ln x$.
3616. $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.
3617. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.
3618. $y^2 = \sin \frac{\pi}{x}$.
3619. $y^2 = \sin x^2$.
3620. $y^2 = \sin^3 x$.

§ 7. Extremos de una función de varias variables

1.° *Definición de extremo.* Sea $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función definida en un entorno del punto P_0. Si $f(P_0) > f(P)$, o bien $f(P_0) < f(P)$, para $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, se dice que la función $f(P)$ tiene un extremo (un máximo o un mínimo, respectivamente) en el punto P_0.

2.° *Condición necesaria de extremo.* Una función diferenciable $f(P)$ puede tener extremo solamente en un punto estacionario P_0, o sea, en un punto tal que $df(P_0) = 0$. Por consiguiente, los puntos de extremo de la función $f(P)$ satisfacen al sistema de ecuaciones $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3.° *Condición suficiente de extremo.* La función $f(P)$ tiene en el punto P_0:

a) un máximo, si $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$ para $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

b) un mínimo, si $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$ para $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

La averiguación del signo de la diferencial de segundo orden $d^2f(P_0)$ puede efectuarse mediante una reducción de la forma cuadrática correspondiente a la forma canónica.

En particular, para el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, en el punto estacionario (x_0, y_0) $(df(x_0, y_0) = 0)$ con la condición $D = AC - B^2 \neq 0$, donde $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, se tiene:

1) un mínimo, si $D > 0$, $A > 0$ $(C > 0)$;

2) un máximo, si $D > 0$, $A < 0$ $(C < 0)$;

3) no hay extremo, si $D < 0$.

4.° *Extremos condicionados.* El problema de la determinación de los extremos de la función $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ habiendo una serie de relaciones $\varphi_i(P) = 0$ $(i = 1, \ldots, m; m < n)$ se reduce a la búsqueda de los extremos ordinarios para la función de Lagrange

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(P),$$

donde λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ son factores constantes. El problema de la existencia y el carácter del extremo condicionado se resuelve en el caso más elemental, basándose en el estudio del signo de la diferencial de segundo orden $d^2L(P_0)$ en el punto estacionario P_0 de la función $L(P)$, con la condición de que las variables $dx_1, \ldots, dx_n$ estén ligadas por las relaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

5.° *Extremos absolutos.* Una función $f(P)$, que es diferenciable en un recinto cerrado y acotado, alcanza sus valores máximo y mínimo en este recinto en un punto estacionario o en un punto de la frontera del recinto.

Problemas:

Averiguar los extremos de las siguientes funciones de varias variables:

3621. $z = x^2 + (y - 1)^2$.
3622. $z = x^2 - (y - 1)^2$.
3623. $z = (x - y + 1)^2$.
3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
3625. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.
3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
3627.1. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0, y > 0)$.
3629. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a > 0, b > 0)$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

3634. $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

3641. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

3646. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$

$(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0,\ b>0)$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

3648. $u=x_1x_2^2\ldots x_n^n(1-x_1-2x_2-\ldots-nx_n)$

$(x_1>0,\ x_2>0,\ldots,\ x_n>0)$.

3649. $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$

$(x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3650. Problema de Huygens. Entre dos números positivos a y b hay que introducir n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tal modo que la fracción

$$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

sea máxima.

Hallar los valores extremales de la función z de las variables x, y, dada en forma implícita:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

Hallar los puntos de extremo condicionado para las siguientes funciones:

3654. $z=xy$, si $x+y=1$.

3655. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, si $x^2+y^2=1$.

3656. $z=x^2+y^2$, si $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, si $x^2+y^2=1$.

3657.1. $z=x^2+12xy+2y^2$, si $4x^2+y^2=25$.

3658. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, si $x-y=\frac{\pi}{4}$.

3659. $u=x-2y+2z$, si $x^2+y^2+z^2=1$.

3660. $u=x^my^nz^p$, si

$x+y+z=a$ $(m>0,\ n>0,\ p>0,\ a>0)$.

3661. $u=x^2+y^2+z^2$, si

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

3662. $u=xy^2z^3$, si $x+2y+3z=a$

$(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$.

3663. $u=xyz$, si $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

3663.1. $u=xy+yz$, $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$, si $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, si $x^2+y^2+z^2=1$,

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$

$(a>b>c>0,\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$,
si $Ax+By+Cz=0$, $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$, donde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, si

$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$ $(p>1)$, si

$x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ $(a>0)$.

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x_n}$, si

$\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n=1$ $(\alpha_i>0,\ \beta_i>0,\ x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, si $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$

$(a>0,\ \alpha_i>1,\ i=1, 2,\ldots, n)$.

3671. Hallar los extremos de la forma cuadrática

$$u=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1.$$

3672. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

si $n\geqslant 1$ y $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Indicación. Buscar el mínimo de la función $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ con la condición $x+y=s$.

3673. Demostrar la desigualdad de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i\geqslant 0,\quad x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2,\ldots, n;\quad k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

Indicación. Buscar el mínimo de la función

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=A.$$

3674. Demostrar la desigualdad de Hadamard para un determinante $A=|a_{ij}|$ de orden n:

$$A^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

Indicación. Examinar el extremo del determinante $A=|a_{ij}|$ con las condiciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=S_i \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Determinar los valores máximo (sup) y mínimo (inf) de las siguientes funciones en los recintos indicados:

3675. $z=x-2y-3$, si $0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant x+y\leqslant 1.$

3676. $z=x^2+y^2-12x+16y$, si $x^2+y^2\leqslant 25.$

3677. $z=x^2-xy+y^2$, si $|x|+|y|\leqslant 1.$

3678. $u=x^2+2y^2+3z^2$, si $x^2+y^2+z^2\leqslant 100.$

3679. $u=x+y+z$, si $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1.$

3680. Hallar el ínfimo (inf) y el supremo (sup) de la función

$$u=(x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)}$$

en la región $x>0,\ y>0,\ z>0.$

3681. Comprobar que la función $z=(1+e^y)\cos x-y\,e^y$ tiene un conjunto infinito de máximos y ningún mínimo.

3682. ¿Es suficiente para el mínimo de una función $f(x, y)$ en un punto $M_0\ (x_0, y_0)$ que esta función tenga mínimo a lo largo de cada recta que pasa por el punto M_0?

Examinar el ejemplo $f(x, y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

3683. Descomponer un número positivo dado a en n factores positivos de tal modo que la suma de sus inversos sea mínima.

3684. Descomponer un número positivo dado a en n sumandos de tal modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

3685. Descomponer un número positivo dado a en n factores positivos de tal modo que la suma de unas potencias positivas dadas de dichos factores sea mínima.

3686. Se dan n puntos materiales en el plano. $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$, ..., $P_n\ (x_n, y_n)$, cuyas masas son iguales a $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.

¿Cuál tiene que ser la posición del punto $P\ (x, y)$ para que el momento de inercia del sistema respecto de este punto sea mínimo?

3687. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una bañera rectangular abierta de una capacidad dada V, para que su superficie sea mínima?

3688. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una bañera cilíndrica

abierta, con una sección transversal semicircular, cuya superficie es igual a S, para que su capacidad sea máxima?

3689. Hallar un punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tal que la suma de los cuadrados de sus distancias hasta n puntos dados M_i (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ sea mínima.

3690. Un cuerpo consta de un cilindro circular recto que termina con un cono circular recto. Dada la superficie total del cuerpo, igual a Q, determinar sus dimensiones de tal modo que su volumen sea máximo.

3691. Un cuerpo, cuyo volumen es igual a V, representa un paralelepípedo rectangular recto, cuyas bases inferior y superior vienen terminadas por pirámides regulares y cuadrangulares iguales. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación de las caras laterales de las pirámides respecto de sus bases, para que la superficie total del cuerpo sea mínima?

3692. Hallar un rectángulo de un perímetro dado $2p$, de tal modo que al girar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo.

3693. Hallar un triángulo de un perímetro dado $2p$, de modo que al girar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo.

3694. Inscribir en una semiesfera de radio R un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3695. Inscribir en un cono circular recto un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3696. Inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

un paralelepípedo de volumen máximo.

3697. Inscribir en un cono circular recto, cuya generatriz l forma un ángulo α con el plano de la base, un paralelepípedo rectangular tal que su superficie total sea máxima.

3698. Inscribir en el segmento de paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$, un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3699. Hallar la distancia mínima del punto M_0 (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

3700. Determinar la distancia mínima d entre dos rectas en el espacio

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

y

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

3701. Hallar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

3702. Hallar los semiejes de una curva central de segundo orden

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.$$

3703. Hallar los semiejes de una superficie central de segundo orden

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.$$

3704. Determinar el área de la elipse formada en la intersección del cilindro

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

y el plano

$$Ax+By+Cz=0.$$

3705. Determinar el área de la sección del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

por el plano

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

donde

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3706. Según el principio de Fermat, la luz que sale del punto A y que incide en el punto B se propaga por aquella curva, para cuyo recorrido se invierta el tiempo mínimo.

Suponiendo que los puntos A y B están situados en distintos medios ópticos, divididos por un plano, siendo la velocidad de propagación de la luz en el primer medio igual a v_1 y en el segundo igual a v_2, deducir la ley de refracción de la luz.

3707. ¿Cuál debe ser el ángulo de incidencia para que la desviación del rayo luminoso (o sea, el ángulo formado por el rayo incidente y el rayo emergente) que pasa por un prisma, que tiene el ángulo de refracción α y el índice de refracción n, sea mínima.

3708. Las variables x e y satisfacen a una ecuación lineal

$$y = ax + b,$$

cuyos coeficientes se necesitan determinar. Como resultado de una serie de mediciones de igual precisión de las magnitudes x e y se han obtenido los valores x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Aplicando el método de los cuadrados mínimos, determinar los valores más probables para los coeficientes a y b.

Indicación. Según el método de los cuadrados mínimos, los valores más probables de los coeficientes a y b son aquellos para los que la suma de los cuadrados de los errores

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

es mínima.

3709. En el plano se ha dado un sistema de n puntos M_i (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$).

¿Cuál debe ser la posición de la recta

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

para que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos dados de esta recta sea mínima?

3710. Sustituir aproximadamente la función x^2 en el intervalo $(1, 3)$ por una función lineal $ax + b$, de tal modo que la desviación absoluta

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \qquad (1 \leqslant x \leqslant 3)$$

sea mínima.

Capítulo 7 INTEGRALES PARAMETRICAS

§ 1. Integrales propias paramétricas

1.° *Continuidad de la integral.* Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en la región acotada R $[a \leqslant x \leqslant A; b \leqslant y \leqslant B]$, entonces

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\, dx$$

representa una función continua en el segmento $b \leqslant y \leqslant B$.

2.° *Derivación bajo el signo de la integral.* Si, además de lo indicado en 1°, la derivada parcial $f'_y(x, y)$ es continua en la región R, entonces, para $b < y < B$, se verifica la fórmula de Leibniz:

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A f'_y(x, y)\, dx.$$

En el caso más general, en que los límites de integración son funciones diferenciables $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ del parámetro y, y $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ para $b < y < B$, se tiene:

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx =$$

$$= f(\psi(y), y)\, \psi'(y) - f(\varphi(y), y)\, \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\, dx \qquad (b < y < B).$$

3.° *Integración bajo el signo de la integral.* En las condiciones 1°, se tiene

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy.$$

Problemas:

3711. Comprobar que la integral de la función discontinua $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$:

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

es una función continua. Construir la gráfica de la función $u = F(y)$.

3712. Estudiar la continuidad de la función

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\, dx,$$

donde $f(x)$ es una función continua y positiva en el segmento $[0, 1]$.

3713. Hallar

a) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$; c) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x\, dx$;

b) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2}\, dx$; d) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1. Hallar

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta}\, d\theta.$$

3714. Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $[A, B]$. Demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t + h) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a) \quad (A < a < x < B).$$

3714.1. Supongamos que: 1) $\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ en $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ en $0 < \epsilon \leqslant |x| \leqslant 1$; 3) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x)\, dx \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostrar que, si $f(x) \in C[-1, 1]$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^1 f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = f(0).$$

3715. ¿Es posible efectuar el paso al límite bajo el signo integral en la expresión

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, dx?$$

3716. ¿Es posible calcular por la regla de Leibniz la derivada de la función

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

para $y = 0$?

3717. Calcular $F'(x)$, si

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

3718. Calcular $F'(\alpha)$, si

a) $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1 - x^2}} dx$; c) $F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x}\, dx$;

b) $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$;

d) $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x + \alpha, x - \alpha)\, dx$;

e) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy$.

3719. Hallar $F''(x)$, si

$$F(x) = \int_0^x (x + y) f(y)\, dy,$$

donde $f(x)$ es una función diferenciable.

3720. Hallar $F''(x)$, si

$$F(x) = \int_a^b f(y)\, |x - y|\, dy,$$

donde $a < b$ y $f(y)$ es una función continua en $[a, b]$.

3721. Hallar $F''(x)$, si

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta \qquad (h>0),$$

donde $f(x)$ es una función continua.

3722. Hallar $F^{(n)}(x)$, si

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

3722.1. Demostrar la fórmula

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \quad (1)$$

Aplicando la fórmula (1), obtener la cota

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1} \quad \text{para } x\in(-\infty,\ +\infty).$$

3723. Sustituir aproximadamente la función $f(x)=x^2$ en el segmento $1\leqslant x\leqslant 3$ por la función lineal $a+bx$, de tal modo que

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx=\min.$$

3724. Obtener una fórmula de aproximación, de la forma

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

de modo que la desviación media cuadrática de las funciones $a+bx$ y $\sqrt{1+x^2}$ en el segmento dado $[0,\ 1]$ sea mínima.

3725. Hallar las derivadas de las integrales elípticas totales

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

y

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0<k<1)$$

y expresarlas mediante las funciones $E(k)$ y $F(k)$.

Comprobar que $E(k)$ satisface a la ecuación diferencial

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. Demostrar que la función de Bessel de índice entero n

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

satisface a la ecuación de Bessel

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

3727. Sea

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

donde la función $\varphi(x)$ es continua junto con su derivada $\varphi'(x)$ en el segmento $0\leqslant x\leqslant a$.

Demostrar que, para $0<\alpha<a$, se tiene:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Indicación. Hacer $x=\alpha t$.

3728. Comprobar que la función

$$u(x)=\int_0^1 K(x,\ y)\,v(y)\,dy,$$

donde

$$K(x,\ y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{si } x\leqslant y;\\ y(1-x), & \text{si } x>y,\end{cases}$$

y $v(y)$ es continua, satisface a la ecuación

$$u''(x)=-v(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

3729. Hallar $F''_{xy}(x,\ y)$, si

$$F(x,\ y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\,dz,$$

donde $f(z)$ es una función diferenciable.

3730. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable y $F(x)$ una función diferenciable.

Demostrar que la función

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz$$

satisface a la ecuación de las vibraciones de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y a las condiciones iniciales: $u(x, 0)=f(x)$, $u_t'(x, 0)=F(x)$.

3731. Comprobar que, si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[0, l]$ y $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ para $0\leqslant\xi\leqslant l$, entonces la función

$$u(x,\ y,\ z)=\int_0^l\frac{(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Aplicando la derivación respecto del parámetro, calcular las siguientes integrales:

3732. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,dx.$

3733. $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx.$

3734. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

3735. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\ (|a|<1)$

3736. Aplicando la fórmula

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

calcular la integral

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. Aplicando el método de integración bajo el signo de la integral, calcular la integral

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\quad(a>0,\quad b>0).$$

3738. Calcular las integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx;$ b) $\displaystyle\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\quad(a>0, b>0).$

3739. Sean $F(k)$ y $E(k)$ las integrales elípticas totales (véase el problema 3725). Demostrar las fórmulas

a) $\displaystyle\int_0^k F(k)\,k\,dk=E(k)-k_1^2F(k);$

b) $\displaystyle\int_0^k E(k)\,k\,dk=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)],$

donde $k_1^2=1-k^2$.

3740. Demostrar la fórmula

$$\int_0^x xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x),$$

donde $J_0(x)$ y $J_1(x)$ son las funciones de Bessel de índices 0 y 1 (véase el problema 3726).

§ 2. Integrales impropias paramétricas. Convergencia uniforme de las integrales

1.° *Definición de convergencia uniforme.* Una integral impropia

$$\int_a^{+\infty}f(x,\ y)\,dx, \tag{1}$$

donde la función $f(x, y)$ es continua en la región $a\leqslant x<+\infty$, $y_1<y_2$, se llama uniformemente convergente en el intervalo

(y_1, y_2), si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $B = B(\epsilon)$ tal que, para cualquier $b \geqslant B$, se tiene

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

La convergencia uniforme de la integral (1) es equivalente a la convergencia uniforme de todas las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\, dx, \qquad (2)$$

donde $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Si la integral (1) es uniformemente convergente en el intervalo (y_1, y_2), ésta representa una función continua del parámetro y en este intervalo.

2.° *Criterio de Cauchy.* Para la convergencia uniforme de la integral (1) en el intervalo (y_1, y_2) es necesario y suficiente que, para cualquier $\epsilon > 0$ exista un número $B = B(\epsilon)$ tal que

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{para } y_1 < y < y_2,$$

siempre que $b' > B$ y $b'' > B$.

3.° *Criterio de Weierstrass.* Para la convergencia uniforme de la integral (1) es suficiente que exista una función mayorante $F(x)$, no dependiente del parámetro y, tal que

1) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ para $a \leqslant x < +\infty$

2) $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$.

4.° Se verifican unos teoremas similares para las integrales impropias de las funciones discontinuas.

Problemas

Determinar los campos de convergencia de las integrales:

3741. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\, dx$.

3742. $\int_\pi^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx$.

3743. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\, dx$.

3744. $\int_0^{1} \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

3745. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\, dx$.

3746. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx \; (p > 0)$.

Comparando con series, averiguar la convergencia de las siguientes integrales:

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\, dx$.

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^n \sin^2 x} \; (n > 0)$.

3749. $\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

3750. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin (x + x^2)}{x^n}\, dx$.

3751. Enunciar en sentido positivo qué significa que la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

es convergente, pero no uniformemente, en el intervalo (y_1, y_2).

3752. Demostrar que, si 1) la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

es convergente y 2) la función $\varphi(x, y)$ está acotada y es monótona respecto de x, entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \varphi(x, y)\, dx$$

es uniformemente convergente (en la región correspondiente).

3753. Demostrar que la integral uniformemente convergente

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2}\, dx \quad (0 < y < 1)$$

no puede mayorarse por una integral convergente que dependa de un parámetro.

3754. Comprobar que la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$$

1) es uniformemente convergente en cualquier segmento $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$;
2) es convergente, pero no uniformemente, en el segmento $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

3755. Demostrar que la integral de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

1) es uniformemente convergente en cada segmento $[a, b]$ que no contenga el valor $\alpha = 0$, y 2) es convergente, pero no uniformemente en cada segmento $[a, b]$ que contenga el valor $\alpha = 0$.

3755.1. Estudiar la convergencia uniforme de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

en los siguientes intervalos: a) $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$; b) $1 < \alpha < +\infty$.

3755.2. Averiguar si es uniformemente convergente la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{para } 0 < \alpha < 1.$$

3755.3. Comprobar que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$$

es convergente, pero no uniformemente, en el intervalo $1 < \alpha < +\infty$.

Averiguar si son uniformemente convergentes las siguientes integrales en los intervalos indicados:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx \quad (0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3757. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \; (a \leqslant \alpha \leqslant b)$. 3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \; (-\infty < \alpha < +\infty)$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \; (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3760.1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\, dx \quad (0 \leqslant p \leqslant 10)$.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$, donde $p > 0$ está fijado.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$; a) $a < \alpha < b$; б) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy \quad (-\infty < x < +\infty)$.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\, dx \quad (p \geqslant 0)$.

3765.1. Elegir un número $b > 0$ de tal modo que

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon \quad \text{para } 1{,}1 \leqslant n \leqslant 10, \text{ donde } \varepsilon = 10^{-6}.$$

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx$; a) $p \geqslant p_0 > 0$; b) $p > 0 \quad (q > -1)$.

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (0 \leqslant n < +\infty)$.

3768. $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2)$.

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

3771. Una integral se llama uniformemente convergente para un valor dado del parámetro, si es uniformemente convergente en cierto entorno de este valor. Demostrar que la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\, dx}{1+\alpha^2 x^2}$$

es uniformemente convergente para cada valor $\alpha \neq 0$ y no es uniformemente convergente para $\alpha = 0$.

3772. ¿Es lícito el paso al límite bajo el signo de la integral en la expresión

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx?$$

3773. La función $f(x)$ es integrable en el intervalo $(0, +\infty)$. Demostrar la fórmula

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx.$$

3773.1. Demostrar que, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en $[a, +\infty]$, entonces existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3774. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0,$$

si $f(x)$ es absolutamente integrable en el intervalo $(0, +\infty)$.

3775. Demostrar que, si 1) $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ en cada intervalo finito (a, b): 2) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, donde $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$, entonces

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x, y)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x, y)\,dx.$$

3776. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx,$$

sirviéndose del paso al límite bajo el signo de la integral.

3776.1. Sea $f(x)$ una función continua y acotada en $[0, +\infty)$. Demostrar que

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx=f(0).$$

3776.2. Hallar

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^n+1}.$$

3777. Demostrar que la integral

$$F(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-a)^2}\,dx$$

es una función continua del parámetro a.

3777.1. Comprobar que

$$F(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx$$

es una función continua en el intervalo $0 < \alpha < 1$.

3778. Determinar los puntos de discontinuidad de la función

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)\,x}{x}\,dx.$$

Construir la gráfica de la función $y = F(a)$.

Averiguar si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

3779. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$ para $\alpha > 2$.

3780. $F(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ para $\alpha > 0$.

3781. $F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$ para $0 < \alpha < 2$.

3782. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx$ para $0 < \alpha < 1$.

3783. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}\,dx$ para $-\infty < \alpha < +\infty$.

§ 3. Derivación e integración de integrales impropias bajo el signo integral

1.° *Derivación respecto del parámetro.* Si 1) la función $f(x, y)$ es continua junto con su derivada $f'_y(x, y)$ en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ es convergente; 3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ es uniformemente convergente en el intervalo (y_1, y_2), entonces

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$$

para $y_1 < y < y_2$ (regla de Leibniz).

2.° *Fórmula de integración respecto del parámetro.* Si 1) la función $f(x, y)$ es continua para $x \geqslant a$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$; 2) $\int\limits_a f(x, y)\,dx$ es uniformemente convergente en el segmento finito $[y_1, y_2]$, entonces

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy. \qquad (1)$$

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces la fórmula (1) también es válida para un intervalo infinito (y_1, y_2), suponiendo que las integrales interiores en la igualdad (1) son continuas y uno de los miembros de la igualdad (1) existe.

Problemas:

3784. Aplicando la fórmula

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\ (n > 0),$$

calcular la integral

$$I = \int\limits_0^1 x^{n-1} \ln^m x\,dx, \text{ donde } m \text{ es un número natural.}$$

3785. Aplicando la fórmula

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\ (a > 0),$$

calcular la integral

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}, \text{ donde } n \text{ es un número natural.}$$

3786. Demostrar que la integral de Dirichlet

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$$

admite derivada para $\alpha \neq 0$, sin embargo, no puede hallarse mediante la regla de Leibniz.

Indicación. Hacer $\alpha x = y$.

3787. Comprobar que la función

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$

es continua y diferenciable en la región

$$-\infty < \alpha < +\infty.$$

3788. Basándose en la igualdad

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int\limits_a^b e^{-xy}\,dy,$$

calcular la integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

3789. Calcular la integral de Frullani

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

donde $f(x)$ es una función continua y la integral $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ existe para cualquier $A > 0$.

Aplicando la fórmula de Frullani, calcular las integrales:

3790. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a>0, b>0).$

3791. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a>0, b>0).$

3792. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a>0, b>0).$

Aplicando el método de derivación respecto del parámetro, calcular las siguientes integrales:

3793. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha>0, \beta>0).$

3794. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha>0, \beta>0).$

3795. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx \quad (\alpha>0, \beta>0).$

3796. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \quad (\alpha>0, \beta>0).$

Calcular las integrales:

3797. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$ 3799. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx.$

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$ 3800. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2} dx.$

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx.$ 3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx.$

3803. Calcular la integral de Euler-Poisson

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

basándose en la fórmula

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy.$$

Sirviéndose de la integral de Euler-Poisson, hallar las integrales:

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2+2b_1x+c_1) e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a>0, ac-b^2>0).$

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx\, dx \quad (a>0).$ 3807. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a>0).$

3808. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha>0, \beta>0).$

3809. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx\, (a>0).$ 3810. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx\, dx\, (a>0).$

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ (n es un número natural).

3811.1. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0, \delta>0).$$

3812. Basándose en la integral

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geqslant 0),$$

calcular la integral de Dirichlet

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

3812.1. ¿Qué forma tiene, aproximadamente, la gráfica del seno integral

$$y = \operatorname{Si} x,$$

donde

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Sirviéndose de las integrales de Dirichlet y Frullani, calcular las integrales:

3813. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx$ $(\alpha > 0)$.

3814. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx$.

3815. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx$.

3816. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx$.

3817. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx$.

3818. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$.

3819. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx$.

3820. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx$. $(\alpha\beta \neq 0)$.

3821. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin (x^2)}{x}\, dx$.

3822. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, dx$ $(k \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$.

3823. Hallar el factor discontinuo de Dirichlet

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

para diversos valores de x. Construir la gráfica de la función $y = D(x)$.

3824. Calcular las integrales:

a) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\, dx$; b) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b}\, dx$.

3825. Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\, dy,$$

calcular la integral de Laplace

$$L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx.$$

3826. Calcular la integral

$$L_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2}\, dx.$$

Calcular las integrales:

3827. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx$.

3828. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx$.

3829. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c}\, dx$ $(a > 0,\ ac - b^2 > 0)$.

3830. Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \quad (x > 0),$$

calcular las integrales de Fresnel

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin (x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$$

y

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos (x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Hallar las integrales:

3831. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin (ax^2 + 2bx + c)\, dx$ $(a \neq 0)$.

3832. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\, dx$.

3833. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax\, dx$.

3834. Demostrar las fórmulas:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2} \cos a\alpha$,

donde $a \neq 0$ y las integrales tienen el sentido del valor principal de Cauchy.

3835. Hallar la transformada de Laplace

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (p>0)$$

para la función $f(t)$, si:

a) $f(t)=t^n$ (n es un número natural);

b) $f(t)=\sqrt{t}$;

c) $f(t)=e^{\alpha t}$;

d) $f(t)=te^{-\alpha t}$;

e) $f(t)=\cos t$;

f) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$;

g) $f(t)=\sin \alpha \sqrt{t}$.

3836. Demostrar la fórmula (integral de Lipschitz)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt)\, dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (a>0),$$

donde $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi)\, d\varphi$ es la función de Bessel de índice 0 (véase el problema 3726).

3837. Hallar la transformada de Weierstrass

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\, dy,$$

si:

a) $f(y)=1$;

b) $f(y)=y^2$;

c) $f(y)=e^{2ay}$;

d) $f(y)=\cos ay$.

3838. Los polinomios de Chébichev-Laguerre se definen por las fórmulas

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx=\begin{cases} 0, & \text{si } m\neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{si } m=n. \end{cases}$$

3839. Calcular la integral

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]}\, d\xi$$

$$(\sigma_1>0, \quad \sigma_2>0),$$

de mucha importancia en la teoría de probabilidades.

3840. Sea $f(x)$ una función continua y absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Demostrar que la integral

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi$$

satisface a la ecuación de propagación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y a la condición inicial

$$\lim_{t\to+0} u(x,\ t)=f(x).$$

§ 4. Integrales eulerianas

1.° *Función Gamma.* Para $x>0$, se tiene:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

La propiedad fundamental de la función Gamma se expresa por la fórmula de reducción

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

Si n es un número entero positivo, se tiene:

$$\Gamma(n)=(n-1)!; \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2.° *Fórmula de los complementos.* Si x no es un número entero, se tiene:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Esta fórmula permite definir la función Gamma para valores negativos del argumento.

3.° *Función Beta.* Para $x>0$ e $y>0$, se tiene:

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Se verifica la fórmula

$$B(x, y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Problemas:

3841. Demostrar que la función Gamma, $\Gamma(x)$, es continua y admite derivadas continuas de todos los órdenes en la región $x>0$.

3842. Demostrar que la función Beta, $B(x, y)$, es continua y admite derivadas continuas de todos los órdenes en la región $x>0$, $y>0$.

Aplicando las integrales eulerianas, calcular las siguientes integrales:

3843. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$.

3844. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$.

3845. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

3846. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

3847. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$.

3848. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx$.

3849. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>1)$.

3850. $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n es un número entero positivo).

Determinar el campo de existencia y expresar mediante las integrales eulerianas las siguientes integrales:

3851. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx \quad (n>0)$.

3852. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx$.

3853. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$.

3854. $\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx$ $(0<a<b,\ c>0)$.

3855. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$.

3856. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$.

3857. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\,dx$.

3858. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n}\,dx$ $(0<|k|<1)$.

3859. $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx \quad (n>0)$.

3860. $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx$.

3861. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

3862. $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx \quad (a>0)$.

3863. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$.

3864. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx$.

3864.1. $\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$.

3864.2. $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$.

3865. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$.

3866. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx \quad (0<p<1)$.

Indicación. Esta integral puede considerarse como

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)].$$

3867. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx \quad (0<\alpha<\beta)$.

3868. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$.

3869. $\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx \quad (a>0)$.

3870. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx$.

3871. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$ (n es un número natural).

Demostrar las igualdades:

3872. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

3873. $\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

3874. $\prod_{m=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n}\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

3875. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = 1$.

Sirviéndose de la igualdad $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt \ (x>0)$, calcular las integrales:

3876. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}\,dx \qquad (0<m<1)$.

3877. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m}\,dx \qquad (0<m<2)$.

3878. Demostrar las fórmulas de Euler:

a) $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos\alpha x$;

b) $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin\alpha x$

$$\left(\lambda>0,\quad x>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

3879. Hallar la longitud del arco de la curva

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (a>0,\ n \text{ es natural}).$$

3880. Hallar el área de la figura limitada por la curva

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n>0,\ a>0).$$

§ 5. Fórmula integral de Fourier

1.° *Representación de una función mediante la integral de Fourier.* Si, 1) la función $f(x)$ está definida en el eje $-\infty<x<+\infty$, 2) es continua a trozos junto con su derivada $f'(x)$ en cada intervalo finito y 3) es absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, entonces, en todos sus puntos de continuidad, la función admite una representación en forma de integral de Fourier:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{1}$$

donde

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$, el primer miembro de la fórmula (1) debe ser sustituido por

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Para una función par $f(x)$, teniendo en cuenta la observación expuesta respecto de los puntos de discontinuidad, la fórmula (1) toma la forma

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \tag{2}$$

donde

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi.$$

Similarmente, para una función impar $f(x)$, resulta:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \tag{3}$$

donde

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

2.° *Representación de una función mediante la integral de Fourier en el intervalo $(0, +\infty)$.* Una función $f(x)$, definida en el intervalo $(0, +\infty)$ y continua a trozos junto con su derivada $f'(x)$ en cada intervalo finito $(a, b) \subset (0, +\infty)$, absolutamente integrable en $(0, +\infty)$, puede representarse en el intervalo dado según se quiera, o mediante la fórmula (2) (prolongación par), o bien mediante la fórmula (3) (prolongación impar).

Problemas:

Representar las siguientes funciones mediante la integral de Fourier.

3881. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } |x|<1; \\ 0, & \text{si } |x|>1. \end{cases}$

3882. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{si } |x|<1; \\ 0, & \text{si } |x|>1. \end{cases}$

3883. $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)$ $(b>a)$.

3884. $f(x)=\begin{cases} h\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & \text{si } |x|\leqslant a; \\ 0, & \text{si } |x|>a. \end{cases}$

3885. $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. 3886. $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3887. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{si } |x|\leqslant \pi; \\ 0, & \text{si } |x|>\pi. \end{cases}$

3888. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{si } |x|\leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{si } |x|>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3889. $f(t)=\begin{cases} A\sin \omega t, & \text{si } |t|\leqslant \frac{2n\pi}{\omega}; \\ 0, & \text{si } |t|>\frac{2n\pi}{\omega} \end{cases}$ (n es un número natural).

3890. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3891. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$ $(\alpha>0)$. 3893. $f(x)=e^{-x^2}$.

3892. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$. 3894. $f(x)=xe^{-x^2}$.

3895. Representar la función

$$f(x)=e^{-x} \quad (0<x<+\infty)$$

mediante la integral de Fourier, prolongándola de tal modo que resulte a) par; b) impar.

Hallar la transformada de Fourier

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,dt$$

para la función $f(t)$, si:

3896. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$. 3898. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3897. $f(x)=xe^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$. 3899. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

3900. Hallar las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, si:

a) $\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}$;

b) $\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}$ $(x>0)$.

Capítulo 8

INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

§ 1. Integrales dobles

1.° *Cálculo directo de una integral doble.* Se llama integral doble de una función continua $f(x, y)$, extendida a un recinto cuadriculable cerrado y acotado Ω, al número

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \to 0 \\ \max |\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ y la suma se extiende a aquellos valores de i y j para los cuales $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Si el recinto Ω viene dado por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, entonces la integral doble correspondiente puede calcularse según la fórmula

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

2.° *Cambio de variables en la integral doble.* Si las funciones, con diferenciales continuas,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

realizan una transformación biyectiva del recinto cerrado y acotado Ω del plano Oxy en el recinto Ω' del plano Ouv, y el jacobiano

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

entonces se verifica la fórmula

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\, |I|\, du\, dv.$$

En particular, para el caso del paso a coordenadas polares r y φ según las fórmulas $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, se tiene:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Problemas:

3901. Calcular la integral

$$\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy,$$

considerándola como el límite de las sumas integrales, dividiendo el recinto de integración en cuadrados mediante las rectas

$$x = \frac{i}{n},\quad y = \frac{j}{n}\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

y tomando los valores de la función subintegral en los vértices de la derecha de estos cuadrados.

3902. Formar las sumas integrales, la inferior $\underline{S}$ y la superior $\overline{S}$, para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, dividiendo éste en rectángulos mediante las rectas

$$x = 1 + \frac{i}{n},\quad y = 1 + \frac{2j}{n}\qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

¿A qué son iguales los límites de estas sumas cuando $n \longrightarrow \infty$?

3903. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dx\,dy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}},$$

aproximando el recinto de integración por un sistema de cuadrados inscritos, cuyos vértices A_{ij} estén situados en los puntos enteros, y tomando los valores de la función subintegral en los vértices de estos cuadrados que están más alejados del origen de coordenadas. Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de la integral.

3904. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

donde S es el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, dividiendo el recinto S por las rectas $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $x + y = \text{const}$, en cuatro triángulos iguales y tomando los valores de la función subintegral en los centros de gravedad de estos triángulos.

3905. El recinto $S\ \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ está dividido en un número finito de partes cuadriculables ΔS_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de diámetro menor que δ. ¿Para qué valor de δ puede garantizarse la validez de la desigualdad

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i)\,\Delta S_i\right| < 0{,}001,$$

donde $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$?

Calcular las integrales:

3906. $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)\,dy.$ 3907. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi\,dr.$

3909. Demostrar la igualdad

$$\iint_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int_a^A X(x)\,dx \cdot \int_b^B Y(y)\,dy,$$

si R es el rectángulo:

$$a \leqslant x \leqslant A,\quad b \leqslant y \leqslant B.$$

3910. Calcular:

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy,$$

si

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

3911. Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Demostrar la desigualdad

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

donde el signo de igualdad solamente se verifica si $f(x) = \text{const}$.

Indicación. Examinar la integral

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2\, dy.$$

3912. Qué signo tienen las integrales:

a) $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$; b) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$;

c) $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy$?

3913. Hallar el valor medio de la función

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

en el cuadrado: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

3914. Aplicando el teorema del valor medio, acotar la integral

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

3915. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia de un punto del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2$ al origen de coordenadas.

En los ejercicios 3916-3922 hay que colocar los límites de integración en la integral doble $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$, en uno y otro orden, para los recintos indicados Ω.

3916. Ω es el triángulo con los vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

3917. Ω es el triángulo con los vértices $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$.

3918. Ω es el trapecio con los vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$.

3919. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 3920. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant y$.

3921. Ω es el segmento parabólico limitado por las curvas $y = x^2$, $y = 1$.

3922. Ω es el anillo circular $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3923. Demostrar la fórmula de Dirichlet

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dx = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx \quad (a > 0).$$

Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales:

3924. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy$.

3925. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy$.

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy$.

3927. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy$.

3928. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy$.

3929. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$ $(a > 0)$.

3930. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy$.

3931. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)\, dy$.

Calcular las siguientes integrales:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2\, dx\, dy$, si el recinto Ω está limitado por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

3933. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy}{\sqrt{2a - x}}$ $(a > 0)$, si el recinto Ω está limitado por el arco más pequeño de la circunferencia con el centro en el punto (a, a), que es tangente a los ejes de coordenadas, y los ejes de coordenadas.

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy|\, dx\, dy$, si Ω es un círculo de radio a con el centro en el origen de coordenadas.

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, si Ω es un paralelogramo con los lados $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$.

3936. $\iint\limits_{\Omega} y^2\, dx\, dy$, si Ω está limitado por el eje de abscisas y el primer arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Pasar en la integral doble

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$$

a coordenadas polares r, φ, haciendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, y colocar los límites de integración, si:

3937. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

3938. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(a > 0)$.

3939. Ω es el anillo $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$.

3940. Ω es el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

3941. Ω es el segmento parabólico $-a \leqslant x \leqslant a$, $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$.

3942. ¿En qué caso, después de pasar a coordenadas polares, los límites de integración resultan constantes?

Pasar a coordenadas polares r, φ, haciendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, y colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales:

3943. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy$.

3944. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3945. $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dy$.

3946. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\,dy$.

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

Suponiendo que r y φ son coordenadas polares, cambiar el orden de integración en las siguientes integrales:

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr \quad (a > 0)$.

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr \quad (a > 0)$.

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr \quad (0 < a < 2\pi)$.

Pasando a coordenadas polares, sustituir las integrales dobles por simples.

3951. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy$.

3952. $\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy$, где $\Omega = \{|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}$.

3953. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$.

Pasando a coordenadas polares, calcular las siguientes integrales dobles:

3954. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$. 3955. $\iint_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$.

3956. El cuadrado $S\,\{a < x < a + h,\ b < y < b + h\}$, $(a > 0,\ b > 0)$, mediante el sistema de funciones

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

se transforma en un recinto S'. Hallar la razón del área del recinto S' al área del recinto S. ¿A qué es igual el límite de esta razón cuando $h \to 0$?

En lugar de x, y, introducir las nuevas variables u, v, y determinar los límites de integración en las siguientes integrales dobles:

3957. $\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy \quad (0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta)$, si

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

3958. $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y)\,dy$, si $u = x + y$, $v = x - y$.

3959. $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$, si el recinto Ω está limitado por las curvas $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ $(a > 0)$, si

$$x = u\cos^4 v, \quad y = u\sin^4 v.$$

3960. Comprobar que la sustitución de variables

$$x+y=\xi,\ y=\xi\eta$$

transforma el triángulo $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x$ en el cuadrado unidad $0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1$.

3961. ¿Para qué sustitución de las variables el cuadrilátero mixtilíneo, limitado por las curvas $xy=1,\ xy=2,\ x-y+1=0,\ x-y-1=0\ (x>0,\ y>0)$, se transforma en un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de coordenadas?

Efectuando la sustitución correspondiente de las variables, reducir las integrales dobles a ordinarias.

3962. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,dx\,dy.$

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy\ (a^2+b^2\neq 0).$

3964. $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por las curvas $xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=4x\ (x>0,\ y>0)$.

Calcular las siguientes integrales dobles:

3965. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por la recta

$$x^2+y^2=x+y.$$

3966. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy.$

3967. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3968. $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

3969. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por las curvas $y^2=2x,\ x+y=4,\ x+y=12$.

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por las curvas $xy=1,\ x+y=\frac{5}{2}$.

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy.$ 3973. $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy.$

Calcular las integrales de las funciones discontinuas:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy.$

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\,dx\,dy.$ 3976. $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy.$

3977. Demostrar que

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,dx\,dy=0,$$

si m y n son números enteros positivos y al menos uno de ellos es impar.

3978. Hallar

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

donde $f(x,y)$ es una función continua.

3979. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy.$$

3980. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

3981. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x, y)\,dx\,dy \quad (t>0).$$

3982. Demostrar que, si $f(x, y)$ es continua, entonces la función

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\,d\eta$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y).$$

3983. Supongamos que las líneas de nivel de la función $f(x, y)$ son curvas elementales cerradas y que el recinto $S(v_1, v_2)$ está limitado por las curvas $f(x, y)=v_1$ y $f(x, y)=v_2$.

Demostrar que

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

donde $F(v)$ es el área de la figura limitada por las curvas $f(x, y)=v_1$, $f(x, y)=v_2$.

Indicación. Dividir el recinto de integración en partes, limitadas por líneas de nivel de la función $f(x, y)$, infinitamente próximas entre sí.

§ 2. Cálculo de áreas

El área de un recinto S situado en el plano Oxy viene dado por la fórmula

$$S=\iint\limits_S dx\,dy.$$

Problemas:

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

3984. $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$.

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0,\ q>0)$.

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

Pasando a coordenadas polares, calcular las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$; $\quad x^2+y^2\geqslant a^2$.

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $\quad (a>0)$.

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$ $\quad (a>0)$.

Introduciendo las coordenadas polares generalizadas r, φ, según las fórmulas

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\quad y=br\sin^\alpha\varphi \quad (r\geqslant 0),$$

donde a, b y α son unas constantes adecuadamente elegidas y $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas (los parámetros se consideran positivos):

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. 1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$. $\qquad$ 3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

Efectuando un cambio de variables adecuado, hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

3998.1. $x^2=ay$, $x^2=by$, $x^3=cy^2$, $x^3=dy^2$

$$(0<a<b;\ 0<c<d).$$

3998.2. $y=ax^p$, $y=bx^p$, $y=cx^q$, $y=dx^q$,

$$(0<p<q;\ 0<a<b;\ 0<c<d).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad 4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (a>0,\ b>0).$$

3999.1. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, donde λ toma los siguientes valores: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$, $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ $(x>0,\ y>0)$.

4001. Hallar el área de la figura limitada por la elipse

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

donde

$$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

4002. Hallar el área de la figura limitada por las elipses $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u}=c^2$ $(u_2=u_1,\ u_2)$ y las hipérbolas $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1,\ v_2)$ $(0<u_1<u_2;\quad 0<v_1<v_2;\quad x>0,\ y>0)$.

Indicación. Hacer

$$x=c\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=c\operatorname{sh}u\sin v.$$

4003. Hallar el área de la sección de la superficie

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$$

por el plano $x+y+z=0$.

4004. Hallar el área de la sección de la superficie

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

por el plano $z=1-2(x+y)$.

§ 3. Cálculo de volúmenes

El volumen de un cilindroide, limitado por arriba por una superficie continua $z=f(x,y)$, por abajo por el plano $z=0$ y lateralmente por

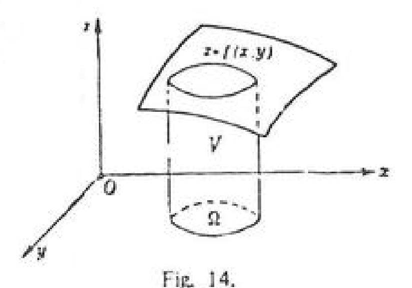


Fig. 14.

una superficie cilíndrica recta, que corta en el plano Oxy un recinto cuadriculable Ω (Fig. 14), es igual a

$$V=\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Problemas:

4005. Dibujar el cuerpo cuyo volumen expresa la integral

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

4006. Representar los cuerpos cuyos volúmenes vienen expresados por las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}(x+y)\,dx\,dy$; d) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

b) $\displaystyle\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$; e) $\displaystyle\iint_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,dx\,dy$;

c) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$; f) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4007. $z=1+x+y$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4008. $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a\geqslant R\sqrt{2})$.

4009. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

4010. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $|x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

4012. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

Pasando a coordenadas polares, hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

4014. $z=x+y$, $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

4017. $x^2+y^2-az=0$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $z=0$ $(a>0)$.

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z=0$,

$y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$ $(a>0,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies (se supone que los parámetros son positivos).

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

4028. $z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $z=0$.

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$.

4030. $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta;$ $x>0)$.

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4032. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $z=0$.

4033. $z=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(y\geqslant 0)$.

4033.1. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=m$, $y=n$, $z=0$ $(0<m<n)$.

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0)$.

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0,$ $m>0)$.

§ 4. Cálculo de áreas de superficies

1.° *Caso de expresión explícita de una superficie.* El área de una superficie lisa $z=z(x, y)$ se expresa por la integral

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

donde Ω es la proyección de la superficie dada sobre el plano Oxy.

2.° *Caso de expresión paramétrica de una superficie.* Si la superficie viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v),$$

donde $(u, v)\in\Omega$, Ω es un recinto cerrado cuadriculable y las funciones x, y, z admiten diferenciales continuas en el recinto Ω, entonces, para el área de la superficie se tiene la fórmula

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

donde

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Problemas:

4036. Hallar el área de la parte de la superficie $az=xy$, comprendida en el interior del cilindro $x^2+y^2=a^2$.

4037. Hallar el área de la superficie del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4038. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida en el interior del cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

4039. Hallar el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ cortada por los planos $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4040. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada fuera de los cilindros $x^2 + y^2 = \pm ax$ (problema de Viviani).

4041. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4043. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ recortada por los planos $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

4044. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = 2az$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

4045. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = a^2$ recortada por los planos $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

4045.1. Hallar el área de la parte de la superficie

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1,$$

cortada por el plano $z = 0$.

4045.2. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1,$$

recortada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4045.3. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

recortada por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geqslant 0).$$

4045.4. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

recortada por los planos $x = 1$, $x = 2$ $(y \geqslant 0)$.

4046. Hallar el área de la superficie y el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$.

4047. Hallar el área de la parte de la esfera limitada por dos paralelos y dos meridianos.

4048. Hallar el área de la parte del helicoide

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; z = h\varphi, \; \text{donde } 0 < r < a, \; 0 < \varphi < 2\pi.$$

4049. Hallar el área de la parte de la superficie del toro

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \; y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \; z = a\sin\psi$$

$(0 < a \leqslant b)$ comprendida por dos meridianos $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ y dos paralelos $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

¿A qué es igual el área de la superficie de todo el toro?

4050. Hallar el ángulo sólido ω bajo el cual se ve el rectángulo $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, desde el origen de coordenadas.

Deducir una fórmula de aproximación para ω si a es grande.

§ 5. Aplicaciones de las integrales dobles a la mecánica

1.° *Centro de gravedad.* Si x_0, y_0 son las coordenadas del centro de gravedad de una lámina Ω, situada en el plano Oxy y $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad de la lámina, entonces

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y \, dx \, dy, \tag{1}$$

donde $M = \iint_\Omega \rho \, dx \, dy$ es la masa de la lámina.

Si la lámina es homogénea, en las fórmulas (1) se debe hacer $\rho = 1$.

2.° *Momentos de inercia.* Los momentos de inercia I_x, I_y de una lámina Ω, situada en el plano Oxy, respecto de los ejes de coordenadas Ox y Oy, se expresan por las fórmulas

$$I_x = \iint_\Omega \rho y^2 \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_\Omega \rho x^2 \, dx \, dy, \tag{2}$$

respectivamente, donde $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad de la lámina.

Se examina también el momento de inercia centrífugo

$$I_{xy} = \iint_\Omega \rho xy \, dx \, dy. \tag{3}$$

Haciendo $\rho = 1$ en las fórmulas (2) y (3), obtenemos el momento de inercia geométrico de una figura plana.

Problemas:

4051. Hallar la masa de una lámina cuadrada de lado a, si la densidad de la lámina en cada punto es proporcional a la distancia de este punto a uno de los vértices del cuadrado y es igual a ρ_0 en el centro del cuadrado.

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de las láminas homogéneas, limitadas por las siguientes curvas:

4052. $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$.
4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.
4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,\ y>0)$.
4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (lazo).
4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x>0,\ y>0)$.
4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.
4058. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$.

4059. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una lámina circular $x^2+y^2\leqslant a^2$, si su densidad en el punto $M(x, y)$ es proporcional a la distancia del punto M al punto $A(a, 0)$.

4060. Determinar la curva que describe el centro de gravedad de la superficie variable, limitada por las curvas:

$$y=\sqrt{2px},\quad y=0,\quad x=X.$$

Hallar los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los ejes de coordenadas Ox y Oy de las figuras $(\rho=1)$, limitadas por las siguientes curvas:

4061. $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$, $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$, $y=0$ $(b_1>0,\ b_2>0,\ h>0)$.
4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.
4063. $r=a(1+\cos\varphi)$.
4064. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.
4065. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4066. Hallar el momento polar

$$I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

de la figura S limitada por la curva

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

4066.1. Hallar el momento de inercia centrífugo I_{xy} de la figura homogénea limitada por las curvas

$$ay=x^2,\quad ax=y^2,\quad (a>0).$$

4067. Demostrar la fórmula

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$

donde I_l, I_{l_0} son los momentos de inercia de la figura S respecto de dos ejes paralelos l y l_0, de los cuales, l_0, pasa por el centro de gravedad de la figura y d es la distancia entre estos ejes.

4068. Demostrar que el momento de inercia de un recinto plano S, respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad $O(0, 0)$ y que forma un ángulo α con el eje Ox, es igual a

$$I=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia del recinto S respecto de los ejes Ox y Oy, e I_{xy} es el momento centrífugo:

$$I_{xy}=\iint\limits_S \rho xy\,dx\,dy.$$

4069. Hallar el momento de inercia de un triángulo regular de lado a respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad del triángulo y que forma con su altura un ángulo α.

4070. Determinar la presión del agua sobre la pared lateral $x\geqslant 0$ de una vasija cilíndrica $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, si el nivel del agua es $z=h$.

4071. Una bola de radio a está sumergida en un líquido de densidad constante a la profundidad h (contando desde el centro de la bola), donde $h\geqslant a$. Hallar la presión del líquido sobre las partes superior e inferior de la superficie de la bola.

4072. Un cilindro circular recto, cuyo radio de la base es igual a a, y de altura b, está completamente sumergido en un líquido de densidad δ, de tal modo que su centro se encuentra a la profundidad h bajo la superficie del líquido y el eje del cilindro forma con la vertical un ángulo α. Determinar la presión del líquido sobre las bases inferior y superior del cilindro.

4073. Determinar la fuerza de atracción de un punto material $P(0, 0, b)$ por un cilindro homogéneo $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant h$, si la masa del cilindro es igual a M y la masa del punto es igual a m.

4074. La distribución de la presión de un cuerpo sobre una lámina arrugada

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

viene dada por la fórmula $p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$.

Calcular la presión media del cuerpo sobre esta lámina.

4075. Un prado, que tiene la forma de un rectángulo con los lados a y b, está cubierto uniformemente por hierba segada cuya densidad es igual a $p\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. ¿Qué trabajo mínimo hay que realizar para recoger todo el heno en el centro del prado, si el trabajo de transporte de una carga de P kg a la distancia r es igual al kPr $(0<k<1)$.

§ 6. Integrales triples

1.° *Cálculo directo de una integral triple.* Si la función $f(x, y, z)$ es continua y el recinto V está acotado y se define por las siguientes desigualdades:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y),$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ son funciones continuas, entonces la integral triple de la función $f(x, y, z)$, extendida al recinto V, puede calcularse por la fórmula

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x, y, z)\,dz.$$

A veces es conveniente aplicar la fórmula

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_{x_1}^{x_2}dx\iint_{S(x)}f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

donde $S(x)$ es la sección del recinto V por el plano $x=\text{const}$.

2.° *Cambio de variables en la integral triple.* Si el recinto cubiculable cerrado y acotado V del espacio $Oxyz$ se transforma biunívocamente en el recinto V' del espacio $O'uvw$ mediante las funciones con diferenciales continuas

$$x=x(u, v, w),\quad y=y(u, v, w),\quad z=z(u, v, w),$$

siendo

$$I=\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\neq 0 \text{ para } (u, v, w)\in V',$$

se verifica la fórmula

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'}f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

Como casos particulares, se tiene: 1) el sistema de coordenadas cilíndricas φ, r, h, donde

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

y

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)}=r,$$

y 2) el sistema de coordenadas esféricas φ, ψ, r, donde

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi\quad z=r\sin\psi,\text{*)}$$

y

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)}=r^2\cos\psi.$$

Problemas:

Calcular las siguientes integrales triples:

4076. $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

---

*) A veces, se utilizan las coordenadas esféricas φ, θ, ρ, relacionadas con las coordenadas cartesianas por las fórmulas

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta,$$

donde $0\leqslant\rho<+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, y

$$I=\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \theta, \rho)}=\rho^2\sin\theta$$

Aquí θ, ρ son las coordenadas polares en el semiplano $\varphi=\text{const}$ respecto del sistema polar con el polo en el origen y cuyo eje polar coincide con el semieje positivo Oz y φ es la coordenada cilíndrica. Estas coordenadas esféricas están relacionadas con las coordenadas cilíndricas por las fórmulas

$$r=\rho\sin\theta,\quad h=\rho\cos\theta,\quad \varphi=\varphi.$$

(N. del T.)

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ donde el recinto V está limitado por las superficies $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$$

Colocar de diversos modos los límites de integración en las siguientes integrales triples:

4081. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz.$

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\,dz.$

4083. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz.$

Sustituir las integrales triples por integrales ordinarias:

4084. $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\eta f(\zeta)\,d\zeta.$

4085. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz.$

4086. Hallar

$$\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B dy \int\limits_c^C f(x, y, z)\,dz,$$

si $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ y a, b, c, A, B, C son constantes.

Pasando a coordenadas esféricas, calcular las integrales:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por la superficie $x^2+y^2+z^2=z$.

4088. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$

4089. Pasar a coordenadas esféricas en la integral

$$\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

4090. Efectuando el cambio de variables correspondiente, calcular la integral triple

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4091. Pasando a coordenadas cilíndricas, calcular la integral

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4092. Calcular la integral

$$\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

4093. Hallar la integral $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está situado en el octante $x>0$, $y>0$, $z>0$ y está limitado por las superficies:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m}, \quad z=\frac{x^2+y^2}{n}, \quad xy=a^2, \quad xy=b^2, \quad y=\alpha x, \quad y=\beta x$$

$$(0<a<b; \quad 0<\alpha<\beta; \quad 0<m<n).$$

4094. Hallar el valor medio de la función

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

en el recinto $x^2+y^2+z^2 \leqslant x+y+z$.

4095. Hallar el valor medio de la función

$$f(x,\ y,\ z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

en el recinto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

4096. Aplicando el teorema del valor medio, acotar la integral

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

donde $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. Demostrar que, si la función $f(x,\ y,\ z)$ es continua en el recinto V y

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=0$$

para cualquier recinto $\omega \subset V$, entonces $f(x,\ y,\ z)\equiv 0$ para $(x,\ y,\ z)\in V$.

4098. Hallar $F'(t)$, si:

$$\text{a)}\ F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

donde f es una función diferenciable:

$$\text{b)}\ F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t\\ 0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz,$$

donde f es una función diferenciable.

4099. Hallar

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

donde m, n y p son números enteros no negativos.

4100. Calcular la integral de Dirichlet

$$\iiint\limits_{V} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$$

$$(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0),$$

donde el recinto V está limitado por los planos $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, haciendo

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Cálculo de volúmenes mediante integrales triples

El volumen de un recinto V se expresa por la fórmula

$$V=\iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz.$$

Problemas:

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4101. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.
4102. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.
4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.
4104. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.
4105. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.
4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Pasando a coordenadas esféricas o cilíndricas, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.
4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.
4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.
4110. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$ $(0<a<b)$.

En los siguientes ejercicios es conveniente utilizar las coordenadas esféricas generalizadas

$$r,\ \varphi \text{ y } \psi \left(r\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

introduciéndolas según las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ y &= br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ z &= cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\}$$

(a, b, c, α, β son unas constantes)*)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

4112.1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

Utilizando un cambio de variables adecuado, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies (se supone que los parámetros son positivos):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4116.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.1. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.2. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

*) También pueden utilizarse las coordenadas esféricas generalizadas, según las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= a\rho\sin^{\alpha}\theta\cos^{\beta}\varphi \\ y &= b\rho\sin^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\varphi \\ z &= c\rho\cos^{\alpha}\theta \end{aligned}$$

$$(0\leqslant\rho<+\infty),\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$$

con

$$I=\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}=\alpha\beta abc\,\rho^2\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi$$

Véase la nota del traductor en el § 6. (N. del T.)

4118.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x>0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{a^4z^2}{x^2+y^2}$.

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

4123. $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $x=a$.

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4125. ¿En qué razón divide la superficie $x^2+y^2+az=4a^2$ el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$?

4126. Hallar el volumen y el área de la superficie del cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4127. Hallar el volumen del paralelepípedo limitado por los planos

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i \quad (i=1, 2, 3),$$

si

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2,$$

si

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n>1).$$

4130. Hallar el volumen del cuerpo situado en el octante positivo del espacio $Oxyz$ ($x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$) y limitado por las superficies:

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0,\ n>0,\ p>0), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

§ 8. Aplicaciones de las integrales triples a la mecánica

1.° *Masa de un cuerpo.* Si un cuerpo ocupa un volumen V y $\rho=\rho(x, y, z)$ es su densidad en el punto (x, y, z), entonces su masa es igual a

$$M=\iiint\limits_V \varrho\, dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

2.° *Centro de gravedad de un cuerpo.* Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo (x_0, y_0, z_0) se calculan por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho x\, dx\, dy\, dz, \\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho y\, dx\, dy\, dz, \\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho z\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si el cuerpo es homogéneo, en las fórmulas (1) y (2) se puede hacer $\rho=1$.

3.° *Momento de inercia.* Se llaman momentos de inercia de un cuerpo respecto de los planos coordenados a las integrales respectivas

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \varrho z^2\, dx\, dy\, dz, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_V \varrho x^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \varrho y^2\, dx\, dy\, dz.$$

Se llama momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje l a la integral

$$I_l=\iiint\limits_V \varrho r^2\, dx\, dy\, dz,$$

donde r es la distancia del punto variable del cuerpo (x, y, z) al eje l. En particular, para los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, se tiene, respectivamente:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}, \quad I_y=I_{yx}+I_{yz}, \quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Se llama momento de inercia de un cuerpo respecto del origen de coordenadas a la integral

$$I_0=\iiint\limits_V \varrho\,(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Evidentemente, se tiene:

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4.° *Potencial de un campo de gravitación.* Se llama potencial newtoniano de un cuerpo en el punto $P(x, y, z)$ a la integral

$$u(x, y, z)=\iiint\limits_V \varrho(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

donde V es el volumen del cuerpo, $\rho=\rho(\xi, \eta, \zeta)$ es su densidad y

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

Un punto material de masa m es atraído por el cuerpo con una fuerza, cuyas proyecciones X, Y, Z, sobre los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, son iguales a

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V \varrho\frac{\xi-x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V \varrho\frac{\eta-y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_V \varrho\frac{\zeta-z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

donde k es la constante de la ley de gravitación.

Problemas:

4131. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa el volumen unidad $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, si la densidad del cuerpo en el punto $M(x, y, z)$ viene dada por la fórmula $\rho=x+y+z$.

4132. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa la región infinita

$x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$, si la densidad varía según la ley $\rho=\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde $\rho_0>0$ y $k>0$ son constantes.

Hallar las coordenadas del centro de gravedad para los cuerpos homogéneos limitados por las siguientes superficies:

4133. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

4134. $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4135. $x^2=2pz$, $y^2=2px$, $x=\frac{p}{2}$, $z=0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4137. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

4138. $x^2+y^2=2z$, $x+y=z$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4140. $z=x^2+y^2$, $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$
$(n>0,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4142. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo que tiene la forma de un cubo:

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1,$$

si su densidad en el punto (x, y, z) es igual a

$$\varrho=x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\,y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\,z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

donde $0<\alpha<1$. $0<\beta<1$. $0<\gamma<1$.

Determinar los momentos de inercia respecto de los planos coordenados de los cuerpos homogéneos limitados por las siguientes superficies (los parámetros son positivos):

4143. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 4145. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

4147.1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4147.2. $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$,
$x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

Determinar los momentos de inercia respecto del eje Oz de los cuerpos homogéneos limitados por las superficies:

4148. $z=x^2+y^2$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$, $z=0$.

4149. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

4149.1. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2z$.

4150. Hallar el momento de inercia de una bola no homogénea $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ de masa M respecto de su diámetro, si la densidad de la bola en el punto variable $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de este punto al centro de la bola.

4151. Demostrar la igualdad

$$I_l=I_{l_0}+Md^2,$$

donde I_l es el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje l, I_{l_0} es el momento de inercia respecto de un eje l_0 que es paralelo a l y pasa por el centro de gravedad del cuerpo, d es la distancia entre los ejes y M es la masa del cuerpo.

4152. Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo que ocupa un volumen V, respecto de un eje l que pasa por su centro de gravedad O (0, 0, 0) y que forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, es igual a:

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

donde I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes coordenados y

$$K_{xy}=\iiint_V \varrho xy\,dx\,dy\,dz,\quad K_{xz}=\iiint_V \varrho xz\,dx\,dy\,dz,$$
$$K_{yz}=\iiint_V \varrho yz\,dx\,dy\,dz$$

son los momentos centrífugos.

4153. Hallar el momento de inercia de un cilindro homogéneo $x^2+y^2\leqslant a^2$, $z=\pm h$, de densidad ρ_0, respecto de la recta $x=y=z$.

4154. Hallar el momento de inercia respecto del origen de coordenadas de un cuerpo de densidad ρ_0, limitado por la superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2).$$

4155. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(x, y, z)$ de una bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ de densidad ρ_0.

Indicación. Hacer pasar el eje $O\zeta$ por el punto $P(x, y, z)$.

4156. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(x, y, z)$ de una capa esférica $R_1^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R_2^2$, si su densidad es $\rho = f(r)$, donde f es una función dada y $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(0,0,z)$ del cilindro $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, de densidad constante ρ_0.

4158. ¿Con qué fuerza es atraído el punto $P(0, 0, a)$ de masa m por una bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ de masa M?

4159. Hallar la fuerza con la que es atraído el punto $P(0, 0, z)$ de masa unidad por el cilindro homogéneo $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, de densidad ρ_0.

4160. Hallar la fuerza con la que un sector esférico homogéneo de densidad ρ_0 atrae a un punto material de masa unidad, situado en el vértice del sector, si el radio de la superficie esférica es igual a R y el ángulo de la sección axial del sector es igual a 2α.

§ 9. Integrales impropias dobles y triples

1.° *Caso de un recinto infinito.* Si el recinto bidimensional Ω no está acotado y la función $f(x, y)$ es continua en Ω, entonces, por definición, se hace

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde Ω_n es una sucesión arbitraria de recintos cuadriculables cerrados y acotados, que agotan el recinto Ω. Si existe el límite del segundo miembro y éste no depende de la elección de la sucesión Ω_n, la integral correspondiente se llama convergente; en caso contrario, divergente.

De un modo similar se define la integral triple impropia de una función continua, extendida a un recinto tridimensional no acotado.

2.° *Caso de una función discontinua.* Si la función $f(x, y)$ es continua en todo el recinto cerrado y acotado Ω, a excepción del punto $P(a, b)$, entonces

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{\Omega - U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

donde U_ε es un recinto de diámetro ε que contiene al punto P, y en el caso de existencia del límite, la integral considerada se llama convergente; en caso contrario, divergente.

Suponiendo que en un entorno del punto $P(a, b)$ se verifica la igualdad.

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha},$$

donde el valor absoluto de la función $\varphi(x, y)$ está comprendido entre dos números positivos m y M y $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ se obtiene que: 1) si $\alpha < 2$ la integral (2) es convergente; 2) si $\alpha \geqslant 2$, la integral (2) es divergente.

De un modo similar se define la integral impropia (2) si la función $f(x, y)$ tiene una línea de discontinuidad.

El concepto de integral impropia de una función discontinua se extiende fácilmente al caso de integrales triples.

Problemas:

Estudiar la convergencia de las integrales impropias con el recinto infinito de integración ($0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M$):

4161. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \geqslant 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$ 4162. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint_{0 \leqslant y \leqslant 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4164. $\displaystyle\iint_{|x|+|y| \geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,\ q>0)$.

4165. $\displaystyle\iint_{x+y \geqslant 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

4166. Demostrar que, si la función continua $f(x, y)$ no es negativa y S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión cualquiera de recintos cerrados y acotados que agotan el recinto S, entonces

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{S_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde el primer miembro tiene sentido o no simultáneamente con el segundo miembro.

4167. Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\substack{|x| \leqslant n \\ |y| \leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

mientras que

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0$$

(n es un número natural).

4168. Demostrar que la integral

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,\,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

es divergente, a pesar de que las integrales reiteradas

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

son convergentes.

Calcular las integrales:

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1,\\ x\geqslant 1}}\frac{dx\,dy}{x^p y^q}$.

4170. $\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$.

4171. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

4172. $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$.

4173. $\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$.

4174. $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

Pasando a coordenadas polares, calcular las integrales:

4175. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

4176. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Calcular las integrales:

4178. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$,

donde $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy$.

4180. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy \quad (0<|\varepsilon|<1)$.

Estudiar la convergencia de las integrales dobles impropias de las funciones discontinuas ($0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$):

4181. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde el recinto Ω se determina por las condiciones: $|y|\leqslant x^2$; $x^2+y^2\leqslant 1$.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$.

4183. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>0,\ q>0)$.

4184. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\,dx\,dy$.

4186. Demostrar que, si: 1) la función $\varphi(x,y)$ es continua en el recinto acotado $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$; 2) la función $f(x)$ es continua en el segmento $a\leqslant x\leqslant A$ y 3) $p<1$, entonces la integral

$$\int_a^A dx\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\,dy$$

es convergente.

Calcular las siguientes integrales:

4187. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$.

4188. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x\frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a>0)$.

4189. $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,dx\,dy$,

donde el recinto Ω está limitado por las rectas $y=0$, $y=x$, $x=\pi$.

4190. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales triples:

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz$,

donde $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

4192. $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz,$$

donde $0 < m \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M$.

4193. $$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r} \quad (p>0,\ q>0,\ r>0).$$

4194. $$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\{|y-\varphi(x)|^2+|z-\psi(x)|^2\}^p},$$

donde $0 < m \leqslant |f(x, y, z)| \leqslant M$, y $\varphi(x)$, $\psi(x)$ son funciones continuas en el segmento $[0, a]$.

4195. $$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\\ |y|\leqslant 1,\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}.$$

Calcular las integrales:

4196. $$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}.$$

4197. $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

4198. $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

4199. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz.$$

4200. Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

donde $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ es una forma cuadrática definida positiva.

§ 10. Integrales múltiples

1.° *Cálculo directo de las integrales múltiples.* Si una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es continua en el recinto acotado definido por las desigualdades

$$\begin{cases} x_1' \leqslant x_1 \leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \end{cases}$$

donde x_1' y x_1'' son constantes y $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, ..., $x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ son funciones continuas, entonces la integral múltiple correspondiente puede calcularse según la fórmula

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_n'(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

2.° *Cambio de variables en la integral múltiple.* Si 1) la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es uniformemente continua en un recinto medible y acotado Ω; 2) las funciones con diferenciales continuas

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

realizan una transformación biunívoca del recinto Ω del espacio $Ox_1x_2 \ldots x_n$ en un recinto acotado Ω' del espacio $O'\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$ y 3) el jacobiano

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} \neq 0$$

en el recinto Ω', entonces es válida la fórmula

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega'}\cdots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,|I|\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

En particular, al pasar a las coordenadas polares $(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ según las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

se tiene

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

Problemas:

4201. Sea $K(x, y)$ una función continua en el recinto R $(a \leqslant x \leqslant b;$ $a \leqslant y \leqslant b)$ y

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_n, y)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n.$$

Demostrar que

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y)\, dt.$$

4202. Sea $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función continua en el recinto $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Demostrar la igualdad

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f\, dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f\, dx_1 \quad (n \geqslant 2).$$

4203. Demostrar que

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\}^n,$$

donde f es una función continua.

Calcular las siguientes integrales múltiples:

4204. a) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n;$

b) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$

4205. $I_n = \int\int\dots\int_{\substack{x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \dots,\ x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant a}} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \dots x_n\, dx_n.$

4207. $\int\int\dots\int_{\substack{x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \dots,\ x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$

4208. Hallar el volumen del paralelepípedo n-dimensional, limitado por los planos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

siendo $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

4209. Hallar el volumen de la pirámide n-dimensional

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$(a_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n).$$

4210. Hallar el volumen del cono n-dimensional, limitado por las superficies

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n.$$

4211. Hallar el volumen de la esfera n-dimensional

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

4212. Hallar

$$\int\int\dots\int_\Omega x_n^2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

donde el recinto Ω se determina por las desigualdades

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leqslant a^2, \quad -\frac{h}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{h}{2}.$$

4213. Calcular

$$\int\int\dots\int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1} \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

4214. Demostrar la igualdad

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du.$$

4215. Demostrar la igualdad

$$\int_0^x x_1\, dx_1 \int_0^{x_1} x_2\, dx_2 \dots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)\, du.$$

4216. Demostrar la fórmula de Dirichlet

$$\int\int\dots\int_{\substack{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1}} x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} \dots x_n^{p_n - 1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0).$$

4217. Demostrar la fórmula de Liouville

$$\iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leq 1}} \ldots \int f(x_1+x_2+\ldots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1} du \; (p_1, p_2, \ldots, p_n > 0),$$

donde $f(u)$ es una función continua.

Indicación. Aplicar el método de inducción matemática.

4218. Reducir a una integral simple la integral n-ple $(n \geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega} \ldots \int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

extendida al recinto $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2$, donde $f(u)$ es una función continua.

4219. Calcular el potencial sobre sí mismo de una bola homogénea de radio R y densidad ρ_0, es decir, hallar la integral

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \int\int\int\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} \int\int\int\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{1,2}},$$

donde

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

4220. Calcular la integral n-ple

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i + c\right\}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

si $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \; (a_{ij}=a_{ji})$ es una forma cuadrática definida positiva.

§ 11. Integrales curvilíneas

1.° *Integral curvilínea de 1.ª especie.* Si $f(x, y, z)$ es una función, definida y continua en los puntos de una curva lisa C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

y ds es la diferencial de arco, se tiene

$$\int\limits_C f(x, y, z)\, ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt.$$

Una particularidad de esta integral es que no depende la dirección en la curva C.

2.° *Aplicaciones de la integral curvilínea de 1ª especie a la mecánica.* Si $\rho = \rho(x, y, z)$ es la densidad lineal en el punto variable (x, y, z) de la curva C, entonces la masa de la curva C es igual a:

$$M = \int\limits_C \varrho(x, y, z)\, ds.$$

Las coordenadas del centro de gravedad (x_0, y_0, z_0) de esta curva se expresan por las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_C x\varrho(x, y, z)\, ds, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_C y\varrho(x, y, z)\, ds, \quad z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_C z\varrho(x, y, z)\, ds.$$

3.° *Integral curvilínea de 2ª especie.* Si las funciones $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ son continuas en los puntos de la curva (1), recorrida en la dirección del crecimiento del parámetro t, se tiene

$$\int\limits_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \{P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + \tag{2}$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\}\, dt.$$

Al cambiar la dirección del recorrido de la curva C esta integral cambia su signo por el contrario. En la mecánica, la integral (2) representa el trabajo de una fuerza variable $\{P, Q, R\}$, cuyo punto de aplicación describe la curva C.

4.° *Caso de una diferencial total.* Si

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = du$$

donde $u = u(x, y, z)$ es una función uniforme en el recinto V, entonces, independientemente de la forma de la curva C, situada completamente en el recinto V, se tiene:

$$\int\limits_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

donde (x_1, y_1, z_1) es el punto inicial del camino y (x_2, y_2, z_2) el final. En el caso más simple, en que el recinto V es simplemente conexo y las funciones P, Q, y R admiten derivadas parciales continuas de primer orden, para esto es necesario y suficiente que se cumplan idénticamente las siguientes condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z};$$

en el recinto V.

Entonces, en el caso más simple de un recinto paralelepipeidal V se puede hallar la función u según la fórmula

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+c,$$

donde (x_0, y_0, z_0) es un punto fijo del recinto V y c es una constante arbitraria.

En la mecánica, este caso corresponde al trabajo de una fuerza que tiene potencial.

Problemas:

Calcular las siguientes integrales curvilíneas de 1.ª especie.

4221. $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el contorno del triángulo con los vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$.

4222. $\int_C y^2\,ds$, donde C es un arco de la cicloide

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, donde C es la curva

$$x=a(\cos t+t\sin t), \quad y=a(\sin t-t\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4224. $\int_C xy\,ds$, donde C es el arco de la hipérbola

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y=a\,\mathrm{sh}\,t \quad (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, donde C es el arco de la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, donde C es un circuito convexo limitado por las curvas $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r y φ son las coordenadas polares).

4227. $\int_C |y|\,ds$, donde C es el arco de la lemniscata

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

4228. $\int_C x\,ds$, donde C es la parte de la espiral logarítmica $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ situada en el interior del círculo $r\leqslant a$;

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, donde C es la catenaria $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

Hallar las longitudes de los arcos de las curvas del espacio (los parámetros son positivos):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, desde O (0, 0, 0) hasta A (3, 3, 2).

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, para $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\,\frac{z}{c}$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\,ch\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right)=a$ desde el punto $A(a, 0, 0)$ hasta el punto $B(x, y, z)$.

Calcular las integrales curvilíneas de 1ª especie, tomadas a lo largo de las curvas del espacio.

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, donde C es la parte de la hélice circular

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4238. $\int_C x^2\,ds$, donde C es la circunferencia

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0.$$

4239. $\int_C z\,ds$, donde C es la hélice cónica

$$x=t\cos t, \quad y=t\sin t, \quad z=t \quad (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

4240. $\int_C z\,ds$, donde C es el arco de la curva $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ desde el punto O (0, 0, 0) hasta el punto $A(a, a, a\sqrt{2})$.

4241. Hallar la masa de la curva $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a\geqslant b>0;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, si su densidad lineal en el punto (x, y) es igual a $\rho=|y|$.

4241.1. Hallar la masa del arco de la parábola

$$y^2 = 2px \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right),$$

si su densidad lineal en el punto variable $M(x, y)$ es igual a $|y|$.

4242. Hallar la masa del arco de la curva $x = at$, $y = \frac{a}{2}t^2$ $z = \frac{a}{3}t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, cuya densidad varía según la ley $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4243. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva homogénea $y = a\, ch\frac{x}{a}$ desde el punto $A(0, a)$ hasta el punto $B(b, h)$.

4244. Determinar el centro de gravedad del arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

4244.1. Hallar los momentos estáticos

$$S_y = \int_C x\, ds, \quad S_x = \int_C y\, ds$$

del arco C de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$$

respecto de los ejes de coordenadas.

4244.2. Hallar el momento de inercia de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

respecto de su diámetro.

4244.3. Hallar los momentos polares de inercia

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\, ds$$

respecto del punto $O(0, 0)$ para las siguientes líneas: a) para el contorno C del cuadrado $\max\{|x|, |y|\} = a$; b) para el contorno C del triángulo regular con los vértices en coordenadas polares

$$P(a, 0),\ Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right),\ R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right).$$

4244.4. Hallar el radio polar medio de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

es decir, el número r_0 ($r_0 > 0$), definido por la fórmula

$$I_0 = s \cdot r_0^2,$$

donde I_0 es el momento polar de inercia de la astroide respecto del origen de coordenadas (véase 4244.3) y s es la longitud de arco de la astroide.

4245. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del contorno del triángulo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4246. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \qquad (-\infty < t \leqslant 0).$$

4247. Hallar los momentos de inercia respecto de los ejes de coordenadas de una espira de la hélice circular

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4248. Calcular la integral curvilínea de 2ª especie

$$\int_{OA} x\, dy - y\, dx,$$

donde O es el origen de coordenadas y el punto A tiene las coordenadas (1, 2), si: a) OA es un segmento de recta; b) OA es una parábola, cuyo eje es Oy; b) OA es una poligonal, compuesta por el segmento OB del eje Ox y del segmento BA que es paralelo al eje Oy.

4249. Calcular

$$\int_{OA} x\, dy + y\, dx$$

para los caminos a), b) y c), indicados en el problema precedente.

Calcular las siguientes integrales curvilíneas de 2ª especie, tomadas a lo largo de las curvas indicadas en dirección del crecimiento del parámetro.

4250. $\int_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, donde C es la parábola

$$y = x^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

4251. $\int_C (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, donde C es la curva

$$y = 1 - |1-x| \quad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

4252. $\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4253. $\int_C (2a-y)\,dx + x\,dy$, donde C es el arco de la cicloide

$$x = a(t-\sin t),\; y = a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4254. $\oint_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4255. $\oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, donde $ABCDA$ es el contorno del cuadrado con los vértices $A\ (1,0)$, $B\ (0,1)$, $C\ (-1,0)$, $D\ (0,-1)$.

4256. $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, donde AB es el segmento de recta que une los puntos $A\ (0,\pi)$ y $B\ (\pi,0)$.

4257. $\oint_{OmAnO} dy \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - dx$, donde OmA es el segmento de la parábola $y=x^2$ y OnA es el segmento de la recta $y=x$.

Cerciorándose de que la expresión subintegral es una diferencia total, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx.$

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy.$

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy.$

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)\,(dx-dy).$

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)\,(dx+dy)$, donde $f(u)$ es continua.

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ a lo largo de caminos que no se corten con el eje Oy.

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a lo largo de caminos que no pasen por el origen de coordenadas.

4265. $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, donde φ y ψ son funciones continuas.

4266. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^2-5y^4)\,dy.$

4267. $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ a lo largo de caminos que no se corten con la recta $y=x$.

4268. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ a lo largo de caminos que no se corten con el eje Oy.

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy).$

4270. Demostrar que, si $f(u)$ es una función continua y C es un circuito cerrado, liso a trozos, entonces

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Hallar la función primitiva z, si:

4271. $dz = (x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy.$

4272. $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}.$

4273. $dz = \frac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx + (x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}.$

4274. $dz = e^x[e^y(x-y+2)+y]\,dx + e^x[e^y(x-y)+1]\,dy.$

4275. $dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,dy.$

4276. $dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Demostrar que para la integral curvilínea es válida la acotación siguiente:

$$\left|\int_C P\,dx + Q\,dy\right| \leqslant LM,$$

donde L es la longitud del camino de integración y $M = \max\sqrt{P^2 + Q^2}$ en el arco C.

4278. Acotar la integral

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Demostrar que $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

Calcular las integrales curvilíneas, tomadas a lo largo de curvas del espacio (se supone que el sistema de coordenadas es de mano derecha):

4279. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, donde C es la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, recorrida en sentido de crecimiento del parámetro.

4280. $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, recorrida en sentido de crecimiento del parámetro.

4281. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \operatorname{tg} \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, si se observa desde la parte positiva de las x.

4282. $\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, donde C es la parte de la curva de Viviani $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ $(z \geqslant 0, a > 0)$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, si se observa desde la parte positiva $(x > a)$ del eje Ox.

4283. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, donde C es el contorno que limita la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, recorrido de tal modo que, la parte exterior de esta superficie queda hacia la izquierda.

Hallar las siguientes integrales curvilíneas de las diferenciales totales:

4284. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^2\,dz$.

4285. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

4286. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde el punto (x_1, y_1, z_1) está situado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y el punto (x_2, y_2, z_2), en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(a > 0, b > 0)$.

4287. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$, donde φ, ψ, χ, son funciones continuas.

4288. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x + y + z)(dx + dy + dz)$, donde f es una función continua.

4289. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, donde f es una función continua.

Hallar la función primitiva u si:

4290. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

4291. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$.

4292. $du = \frac{(x + y - z)\,dx + (x + y - z)\,dy + (x + y + z)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.

4293. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad, cuando un punto de masa m se traslada de la posición (x_1, y_1, z_1) a la posición (x_2, y_2, z_2) (el eje Oz lleva la dirección vertical hacia arriba).

4294. Hallar el trabajo de una fuerza elástica, dirigida hacia el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional a la elongación del punto material del origen de coordenadas, si este punto describe el cuadrante positivo de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

4295. Hallar el trabajo de la fuerza de gravitación $F=\frac{k}{r^2}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, la cual actúa sobre una masa unidad cuando esta última se desplaza del punto $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ al punto $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$.

§ 12. Fórmula de Green

1.° *Relación de la integral curvilínea con la integral doble.* Si C es un circuito cerrado simple, liso a trozos, que encierra un recinto finito simplemente conexo S, recorrido de tal modo que el recinto S quede hacia la izquierda, y las funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden $P'_y(x, y)$ y $Q'_x(x, y)$ en el recinto S y en su frontera, entonces es válida la fórmula de Green

$$\oint_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (1)$$

La fórmula (1) también es válida para un recinto acotado S, limitado por unos cuantos circuitos simples, si por frontera C del mismo se entiende la unión de todos los circuitos frontera, donde el recorrido se elige de tal modo que el recinto S quede a la izquierda.

2.° *Area de un recinto plano.* El área de una figura limitada por un circuito simple C, liso a trozos, es igual a

$$S=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy-y\,dx).$$

Mientras no se haya advertido otra cosa, en este párrafo se supondrá que el circuito cerrado de integración es simple (sin puntos de autointersección) y que se recorre de tal modo que el recinto encerrado por él, que no contenga al punto del infinito, queda hacia la izquierda (sentido positivo).

Problemas:

4296. Aplicando la fórmula de Green, transformar la integral curvilínea

$$I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

donde el circuito C encierra un recinto acotado S.

4297. Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral curvilínea

$$I=\oint_K (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy,$$

donde K es el contorno del triángulo ABC con los vértices $A\ (1, 1)$, $B\ (3, 2)$, $C\ (2, 5)$, recorrido en sentido positivo.

Comprobar el resultado obtenido calculando directamente la integral.

Aplicando la fórmula de Green, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

4298. $\oint_C xy^2\,dy-x^2y\,dx$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, donde C es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4300. $\oint_C e^x(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy$, donde C es el circuito que encierra el recinto $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$, recorrido en sentido positivo.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

4302. ¿Cuánto se diferencian entre sí las integrales curvilíneas

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$$

y

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$$

donde AmB es la recta que une los puntos $A\ (1, 1)$ y $B\ (2, 6)$, y AnB es la parábola cuyo eje es vertical y pasa por los mismos puntos A y B y por el origen de coordenadas?

4303. Calcular la integral curvilínea

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy,$$

donde AmO es la semicircunferencia superior $x^2+y^2=ax$, recorrida desde el punto $A\ (a, 0)$ hasta el punto $O\ (0, 0)$.

Indicación. Completar el trayecto AmO hasta cerrarlo, mediante el segmento rectilíneo OA del eje Ox.

4304. Calcular la integral curvilínea

$$\int_{AmB} [\varphi(y)\, e^x - my]\, dx + [\varphi'(y)\, e^x - m]\, dy,$$

donde $\varphi(y)$ y $\varphi'(y)$ son funciones continuas y AmB es un trayecto arbitrario que une los puntos $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$, el cual, junto con el segmento AB encierra una figura $AmBA$ de área S.

4305. Determinar dos funciones con diferenciales continuas $P\,(x, y)$ y $Q\,(x, y)$, de tal modo que la integral curvilínea

$$I = \oint_C P\,(x + \alpha,\ y + \beta)\, dx + Q\,(x + \alpha,\ y + \beta)\, dy$$

para cualquier circuito cerrado C no dependa de las constantes α y β.

4306. ¿A qué condición tiene que satisfacer una función diferenciable $F\,(x, y)$ para que la integral curvilínea

$$\int_{AmB} F(x, y)\,(y\, dx + x\, dy)$$

no dependa de la forma del camino de integración?

4307. Calcular

$$I = \oint_C \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2},$$

donde C es un circuito cerrado simple que no pasa por el origen de coordenadas, recorrido en sentido positivo.

Indicación. Examinar dos casos: 1) el origen de coordenadas está situado fuera del circuito; 2) el circuito C encierra al origen de coordenadas.

Calcular las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas, mediante integrales curvilíneas:

4308. La elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4309. La astroide $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4310. La parábola $(x + y)^2 = ax$ $(a > 0)$ y el eje Ox.

4311. El lazo del folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.
Indicación. Hacer $y = tx$.

4312. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$.
Indicación. Hacer $y = x\, tg\, \alpha$.

4313. La curva $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ y los ejes de coordenadas.

4314. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$(x + y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0,\ n > 0,\ m > 0).$$

4315. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ n > 0)$$

y los ejes de coordenadas.

Indicación. Hacer $\frac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$.

4316. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 1)$ y los ejes de coordenadas.

4317. Calcular el área que encierra el lazo de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ n > 0).$$

4318. Se llama epicicloide la curva que describe un punto de una circunferencia en movimiento de radio r, que rueda sin deslizar por la parte exterior de una circunferencia inmóvil de radio R.
Hallar el área de la figura limitada por la epicicloide, suponiendo que la razón $\frac{R}{r} = n$ es un número entero $(n \geqslant 1)$.

Estudiar el caso particular $r = R$ (la cardioide).

4319. Se llama hipocicloide la curva que describe un punto de una circunferencia en movimiento de radio r, que rueda sin deslizar por la parte interior de una circunferencia inmóvil de radio R. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide, suponiendo que $\frac{R}{r} = n$ es un número entero $(n \geqslant 2)$.

Estudiar el caso particular $r = \frac{R}{4}$ (la astroide).

4320. Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ax$ recortada por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4320.1. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de un circuito cerrado C, situado en el semiplano superior $y \geqslant 0$, es igual a

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2},$$

si $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ y el circuito cerrado simple C encierra al origen de coordenadas $(ad - bc \neq 0)$.

4322. Calcular la integral I (véase el problema anterior), si $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, y el circuito simple C encierra al origen de coordenadas; además, las curvas $\varphi(x, y) = 0$ y $\psi(x, y) = 0$ tienen unos cuantos puntos simples de intersección en el interior del circuito C.

4323. Demostrar que, si C es un circuito cerrado y l es una dirección arbitraria, entonces

$$\oint_C \cos(l, n)\,ds = 0,$$

donde n es la normal exterior al circuito C.

4324. Hallar el valor de la integral

$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)]\,ds,$$

donde C es una curva cerrada simple que limita un recinto finito S, y n es la normal exterior a la misma.

4325. Hallar

$$\lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n)\,ds,$$

donde S es la figura limitada por un circuito C que encierra al punto (x_0, y_0), $d(S)$ es el diámetro del recinto S, n es el vector unitario de la normal exterior al circuito C y $F\{X, Y\}$ es un vector con diferencial continua en $S + C$.

§ 13. Aplicaciones físicas de las integrales curvilíneas

4326. ¿Con qué fuerza atrae una masa M, distribuida uniformemente en la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$, a un punto material de masa m que ocupa la posición $(0, 0)$?

4327. Calcular el potencial logarítmico de simple capa

$$u(x, y) = \oint_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\,ds,$$

donde $\varkappa$ = const es la densidad, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ y el circuito C es la circunferencia $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Calcular en coordenadas polares ρ y φ los potenciales logarítmicos de simple capa

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r}\,d\psi \quad \text{y} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r}\,d\psi,$$

donde r es la distancia del punto (ρ, φ) al punto variable $(1, \psi)$ y m es un número natural.

4329. Calcular la integral de Gauss

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r}\,ds,$$

donde $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ es la longitud del vector r que une el punto $A(x, y)$ con el punto variable $M(\xi, \eta)$ de un circuito cerrado liso simple C, (r, n) es el ángulo formado por el vector r y la normal exterior n a la curva C en su punto M.

4330. Calcular en coordenadas polares ρ y φ los potenciales logarítmicos de doble capa

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(r, n)}{r}\,d\psi \quad \text{y} \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(r, n)}{r}\,d\psi,$$

donde r es la distancia del punto $A(\rho, \varphi)$ al punto variable $M(1, \psi)$, (r, n) es el ángulo formado por la dirección $AM = r$ y el radio $OM = n$, trazado desde el punto $O(0, 0)$, y m es un número natural.

4331. Una función dos veces diferenciable $u=u(x, y)$ se llama armónica, si $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Demostrar que u es una función armónica si, y sólo si

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds=0,$$

donde C es un circuito cerrado arbitrario y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada respecto de la normal exterior a este circuito.

4332. Demostrar que

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy=-\iint_S u\, \Delta u\, dx\, dy+\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S.

4333. Demostrar que una función, que es armónica en el interior de un recinto finito S y en su frontera, se determina unívocamente por sus valores en el circuito C (véase el problema 4332).

4334. Demostrar la segunda fórmula de Green en el plano

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy=\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en dirección de la normal exterior a C.

4335. Aplicando la segunda fórmula de Green, demostrar que si $u=u(x, y)$ es una función armónica en un recinto cerrado finito S, se tiene

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

donde C es la frontera del recinto S, n es la dirección de la normal exterior al circuito C, (x, y) es un punto interior del recinto S y $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ es la distancia del punto (x, y) al punto variable (ξ, η) del circuito C.

Indicación. Recortar el punto (x, y) del recinto S junto con un entorno circular infinitésimo del mismo y aplicar la segunda fórmula de Green a la parte restante del recinto S.

4336. Demostrar el teorema de la media para una función armónica $u(M)=u(x, y)$:

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R} \oint_C u(\xi, \eta)\, ds,$$

donde C es una circunferencia de radio R con el centro en el punto M.

4337. Demostrar que una función armónica $u(x, y)$ en un recinto cerrado y acotado, que no es constante en este recinto, no puede alcanzar sus valores máximo y mínimo absoluto en un punto interior de este recinto (principio del valor máximo).

4338. Demostrar la fórmula de Riemann

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy=\oint_C P\, dx+Q\, dy,$$

donde

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}+a \frac{\partial u}{\partial x}+b \frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}-a \frac{\partial v}{\partial x}-b \frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

(a, b, c son constantes). P y Q son unas funciones determinadas y el circuito C limita un recinto finito S.

4339. Sean $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ las componentes de la velocidad del flujo de un líquido en régimen permanente. Determinar la cantidad de líquido que sale en una unidad de tiempo de un recinto S limitado por un circuito C (o sea, la diferencia entre las cantidades de líquido que sale y que entra). ¿A qué ecuación satisfacen las funciones u y v, si el líquido es incompresible y en el recinto S no hay manantiales y sumideros?

4340. Según la ley de Biot y Savart, una corriente eléctrica i que recorre un elemento de conductor ds, engendra en el punto del espacio $M(x, y, z)$ un campo magnético de intensidad

$$dH=ki \frac{(r \times ds)}{r^3},$$

donde r es el vector que une el elemento ds con el punto M y k es el coeficiente de proporcionalidad.

Hallar las proyecciones H_x, H_y, H_z de la intensidad del campo magnético H en el punto M para el caso de un conductor cerrado C.

§ 14. Integrales de superficie

1.° *Integral de superficie de primera especie.* Si S es una superficie bilateral lisa a trozos

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \tag{1}$$

y $f(x, y, z)$ es una función, definida y continua en los puntos de la superficie S, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{2}$$

donde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

En particular, si la ecuación de la superficie S tiene la forma

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma),$$

donde $z(x, y)$ es una función uniforme con diferencial continua, se tiene

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Esta integral no depende de la cara de la superficie S elegida.

Si se considera que $f(x, y, z)$ es la densidad de la superficie S en el punto (x, y, z), entonces la integral (2) representa la masa de esta superficie.

2.° *Integral de superficie de 2ª especie.* Si S es una superficie bilateral lisa, S^+ es la cara de la misma que se caracteriza por la dirección de la norma $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P = P(x, y, z)$ $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ son tres funciones definidas y continuas en la superficie S, entonces

$$\iint_{S+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{3}$$

Si la superficie S viene dada en forma paramétrica (1), entonces los cosenos directores de la normal n se determinan por las fórmulas:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

donde

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

y el signo ante el radical se elige de un modo adecuado.

Al pasar a la otra cara S^- de la superficie S la integral (3) cambia su signo por opuesto.

Problemas:

4341. ¿Cuánto se diferencian entre sí las integrales de superficie

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$$

y

$$I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2)\, dP,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y P es la superficie del octaedro $|x| + |y| + |z| = a$, incrito en esta esfera?

4342. Calcular

$$\iint_S z\, dS,$$

donde S es la parte de la superficie $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, recortada por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calcular las siguientes integrales de superficie de 1ª especie:

4343. $\iint_S (x + y + z)\, dS$, donde S es la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geqslant 0.$$

4344. $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$, donde S es la frontera del cuerpo

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, donde S es la frontera del tetraedro

$$x + y + z \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

4346. $\iint_S |xyz|\, dS$, donde S es la parte de la superficie $z = x^2 + y^2$ recortada por el plano $z = 1$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{h}$, donde S es la superficie del elipsoide y h es la distancia del centro del elipsoide al plano que es tangente al elemento dS de la superficie del elipsoide.

4348. $z\,dS$, donde S es la parte de la superficie del helicoide

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = v\,(0 < u < a;\ 0 < v < 2\pi).$$

4349. $\iint\limits_S z^2\,dS$, donde S es la parte de la superficie del cono $(0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ y α es una constante $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, donde S es la parte de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, recortada por la superficie

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

4351. Demostrar la fórmula de Poisson

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\,du,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4352. Hallar la masa de la cápsula parabólica

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

cuya densidad varía según la ley $\rho = z$.

4352.1. Hallar la masa de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geqslant 0),$$

cuya densidad en cada uno de sus puntos $M(x, y, z)$ es igual a $\frac{z}{a}$.

4352.2. Hallar los momentos estáticos de la lámina triangular homogénea

$$x + y + z = a \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

respecto de los planos coordenados.

4353. Calcular el momento de inercia respecto del eje Oz de la cápsula homogénea esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geqslant 0)$$

de densidad ρ_0.

4354. Calcular el momento de inercia de la cápsula homogénea cónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant b)$$

de densidad ρ_0 respecto de la recta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - b}{0}.$$

4355. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte de la superficie homogénea

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

recortada por la superficie $x^2 + y^2 = ax$.

4356. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie homogénea

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x + y \leqslant a).$$

4356.1. Hallar los momentos polares de inercia

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$$

de las siguientes superficies S:

a) la superficie del cubo $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$;

b) la superficie total del cilindro $x^2 + y^2 \leqslant R^2 : 0 \leqslant z \leqslant H$.

4356.2. Hallar los momentos de inercia de la lámina triangular

$$x + y + z = 1 \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

respecto de los planos coordenados.

4357. ¿Con qué fuerza atrae la superficie cónica truncada homogénea

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 < b \leqslant r \leqslant a)$$

de densidad ρ_0 a un punto material de masa m situado en el vértice de está superficie?

4358. Hallar el potencial de la superficie esférica homogénea $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de densidad ρ_0, en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, es decir, calcular la integral

$$u = \iint_S \frac{\varrho_0\, dS}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

4359. Calcular

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z)\, dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1; \\ 0 & , \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Construir la gráfica de la función $u = F(t)$.

4360. Calcular la integral

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\, dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si} \quad z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0 & , \text{si} \quad z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

4361. Calcular la integral

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS,$$

donde S es la esfera variable

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

y

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{si} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

suponiendo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0.$$

Calcular las siguientes integrales de superficie de 2ª especie:

4362. $\iint_S (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$, donde S es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4363. $\iint_S f(x)\, dy\, dz + g(y)\, dz\, dx + h(z)\, dx\, dy$, donde $f(x), g(y), h(z)$ son funciones continuas y S es la cara exterior de la superficie del paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant a; 0 \leqslant y \leqslant b; 0 \leqslant z \leqslant c$.

4364. $\iint_S (y - z)\, dy\, dz + (z - x)\, dz\, dx + (x - y)\, dx\, dy$, donde S es la cara exterior de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$.

4365. $\iint_S \left(\frac{dy\, dz}{x} + \frac{dz\, dx}{y} + \frac{dx\, dy}{z}\right)$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4366. $\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$, donde S es la cara exterior de la esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

§ 15. Fórmula de Stokes

Si $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ son funciones con diferenciales continuas y C es un circuito cerrado simple y liso a trozos, que limita una superficie bilateral finita S, lisa a trozos, entonces se verifica la fórmula de Stokes:

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S, cuya dirección es tal que respecto de ésta el recorrido del circuito C se efectúa en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (para un sistema de coordenadas de mano derecha).

Problemas:

4367. Aplicando la fórmula de Stokes, calcular la integral curvilínea

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

donde C es la circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

Comprobar el resultado mediante un cálculo directo.

4368. Calcular la integral

$$\int_{AmB} (x^2-yz)\,dx + (y^2-xz)\,dy + (z^2-xy)\,dz,$$

tomada sobre el arco de la hélice circular

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

desde el punto $A\,(a,\,0,\,0)$ hasta el punto $B\,(a,\,0,\,h)$.

Indicación. Completar la curva AmB con un segmento rectilíneo y aplicar la fórmula de Stokes.

4369. Sea C un circuito cerrado, situado en el plano

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal al plano), que limita una lámina S.

Hallar

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

donde el recorrido del circuito es en sentido positivo.

Aplicando la fórmula de Stokes, calcular las integrales:

4370. $\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,$

donde C es la elipse $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, recorrida en sentido del crecimiento del parámetro t.

4371. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$

donde C es la elipse $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0, h>0)$ recorrido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4372. $\oint_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz,$

donde C es la curva $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,$ $z>0)$, recorrida de tal modo que el recinto menor de la esfera $x^2+y^2+z^2=2Rx$, limitado por la misma quede hacia la izquierda.

4373. $\oint_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz,$

donde C es la sección de la superficie del cubo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ efectuada por el plano $x+y+z=\frac{3}{2}a$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4374. $\oint_C y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz,$

donde C es la curva cerrada $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$ recorrida en el sentido del crecimiento del parámetro t.

4375. Demostrar que la función

$$W(x,\,y,\,z) = ki\iint_S \frac{\cos(r,\,n)}{r^2}\,dS \qquad (k=\text{const}),$$

donde S es una superficie limitada por el circuito C, n es la normal a la superficie S y r es el radio vector que une un punto del espacio $M\,(x, y, z)$ con el punto variable $A\,(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ del circuito C, representa el potencial del campo magnético H, engendrado por la corriente i que recorre el circuito C (véase el problema 4340).

§ 16. Fórmula de Ostrogradski

Si S es una superficie lisa a trozos, que limita un volumen V, y $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ son funciones continuas junto con sus derivadas parciales de 1er orden en el recinto $V+S$, entonces se verifica la fórmula de Ostrogradski:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Problemas:

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, transformar las siguientes integrales de superficie, si la superficie lisa S limita un volumen finito V y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S.

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$.

4377. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$.

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

4380. $\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS.$$

4381. Demostrar que si S es una superficie cerrada simple y l es una dirección constante arbitraria, entonces

$$\iint\limits_S \cos(n, l)\,dS = 0,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

4382. Demostrar que el volumen del cuerpo limitado por una superficie S, es igual a

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

4383. Demostrar que el volumen de un cono limitado por una superficie cónica lisa $F(x, y, z) = 0$ y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, es igual a

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

donde S es el área de la base del cono, situada en el plano dado y H es la altura.

4384. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = \pm c$ y

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, \\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, \\ z &= c\sin u. \end{aligned}\right\}$$

4385. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = -u + a\cos v \quad (u \geqslant 0)$$

y los planos: $x = 0$ y $z = 0$ $(a > 0)$.

4385.1. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el toro

$$\left.\begin{aligned} x &= (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y &= (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z &= a\sin\psi \end{aligned}\right\}$$

$$(0 < a \leqslant b).$$

4386. Demostrar la fórmula

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\} =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t)\,dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \quad (t > 0).$$

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales de superficie:

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$,

donde S es la cara exterior de la frontera del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$,

donde S es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4389. $\iint\limits_S (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dz\,dx +$

$$+ (z - x + y)\,dx\,dy,$$

donde S es la cara exterior de la superficie

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1.$$

4390. Calcular

$$\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS,$$

donde S es la parte de la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a esta superficie.

Indicación. Adjuntar la parte del plano

$$z=h, \quad x^2+y^2 \leqslant h^2.$$

4391. Demostrar la fórmula

$$\iiint_V \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(r, n)\, dS,$$

donde S es una superficie cerrada que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S en el punto variable de la misma (ξ, η, ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ y r es el radio vector que va del punto (x, y, z) al punto (ξ, η, ζ).

4392. Calcular la integral de Gauss

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\, dS,$$

donde S es una superficie simple cerrada lisa que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S en el punto de la misma (ξ, η, ζ), r es el radio vector que une el punto (x, y, z) con el punto (ξ, η, ζ) y $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Examinar dos casos:

a) la superficie S no encierra al punto (x, y, z),

b) la superficie S encierra al punto (x, y, z).

4393. Demostrar que, si

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

y S es una superficie lisa que limita un cuerpo finito V, entonces se verifican las siguientes fórmulas:

a) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$$

b) $$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \iiint_V u\, \Delta u\, dx\, dy\, dz,$$

donde u es una función continua junto con sus derivadas parciales hasta el segundo orden inclusive en el recinto $V+S$ y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada respecto de la normal exterior a la superficie S.

4394. Demostrar la segunda fórmula de Green en el espacio

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

donde el volumen V está limitado por la superficie S, n lleva la dirección de la normal exterior a la superficie S y las funciones $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ son dos veces diferenciables en el recinto $V+S$.

4395. Una función $u=u(x, y, z)$, que admite derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive en un recinto, se llama armónica en el mismo, si

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Demostrar que, si u es una función armónica en un recinto cerrado finito V limitado por una superficie lisa S, entonces se verifican las fórmulas:

a) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0;$$

b) $$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

Aplicando la fórmula b), demostrar que una función armónica en un recinto V se determina unívocamente por sus valores en la frontera S.

4396. Demostrar que, si una función $u=u(x, y, z)$ es armónica en un recinto cerrado finito V limitado por una superficie lisa S, entonces

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

donde r es el radio vector que va del punto interior (x, y, z) del recinto V al punto variable (ξ, η, ζ) de la superficie S, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, n es el vector de la normal exterior a la superficie S en el punto (ξ, η, ζ).

4397. Demostrar que, si $u = u(x, y, z)$ es una función armónica en el interior de una esfera S de radio R con el centro en el punto (x_0, y_0, z_0), entonces

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z)\, dS$$

(teorema del valor medio).

4398. Demostrar que, si una función $u = u(x, y, z)$ es continua en un recinto cerrado y acotado V y es armónica en el interior del mismo, entonces no puede alcanzar sus valores máximo y mínimo absolutos en un punto interior del recinto, a no ser que la función sea idénticamente constante (principio del máximo).

4399. Un cuerpo V está totalmente sumergido en un líquido. Basándose en la ley de Pascal, demostrar que la fuerza de empuje que experimenta el líquido es igual al peso de un volumen de agua igual al volumen del cuerpo, y va dirigida verticalmente hacia arriba (ley de Arquímedes).

4400. Sea S_t una esfera variable $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ y $f(\xi, \eta, \zeta)$ una función continua. Demostrar que la función

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

satisface a la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

y a las condiciones iniciales: $u\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x, y, z)$.

Indicación. Expresar la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ en forma de una integral triple.

§ 17. Elementos de la teoría de campo

1.° *Gradiente.* Si $u(r) = u(x, y, z)$, donde $r = xi + yj + zk$, es un campo escalar con diferencial continua, entonces se llama gradiente del mismo al vector

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

o, abreviadamente, grad $u = \nabla u$, donde $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$.

El gradiente del campo u en un punto dado (x, y, z) lleva la dirección de la normal a la superficie de nivel $u(x, y, z) = C$ que pasa por este punto. Este vector, en cada punto, es igual en valor absoluto a

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

y su dirección, coincide con la de la velocidad máxima de variación de la función u.

La derivada del campo u en una dirección $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ es igual a:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2.° *Divergencia y rotor de un campo.* Si

$$a(r) = a_x(x, y, z) i + a_y(x, y, z) j + a_z(x, y, z) k$$

es un campo vectorial con diferencial continua, entonces, el escalar

$$\operatorname{div} a = \nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

se llama divergencia de este campo.

El vector

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

se denomina rotor del campo o rotacional.

3.° *Flujo de un valor a través de una superficie.* Si el vector $a(r)$ engendra un campo vectorial en un recinto Ω, se llama flujo del vector a través de la superficie dada S, situada en Ω, en una dirección determinada, caracterizada por el vector normal $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, a la integral

$$\iint_S a_n\, dS = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS,$$

donde $a_n = an$ es la proyección normal del vector. La fórmula de Ostrogradski en forma vectorial es:

$$\oint\!\!\oint_S a_n\, dS = \iiint_V \operatorname{div} a\, dx\, dy\, dz,$$

donde S es la superficie que limita al volumen V y n es el vector unitario de la normal exterior a la superficie S.

4.° *Circulación de un vector.* Se llama integral lineal del vector $a(r)$, tomada sobre una curva C (trabajo del campo), al número

$$\int_C a\,dr = \int_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz.$$

Si el circuito C es cerrado, entonces la integral lineal se llama circulación del vector a a lo largo del circuito C.

En forma vectorial, la fórmula de Stokes tiene la forma

$$\oint_C a\,dr = \iint_S (\operatorname{rot} a)_n\,dS,$$

donde C es un circuito cerrado que representa el borde de la superficie S, donde tiene que elegirse el sentido de la normal n a la superficie S de tal modo que, para un observador situado en la superficie S, con la cabeza en dirección de la normal, el recorrido del circuito C se efectúe en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (para un sistema de coordenadas de mano derecha).

5.° *Campo potencial.* Un campo vectorial $a(r)$ que es el gradiente de un escalar u:

$$\operatorname{grad} u = a,$$

se llama potencial, y u se llama potencial del campo.

Si el potencial u es una función uniforme, se tiene

$$\int_{AB} a\,dr = u(B) - u(A).$$

En particular, en este caso la circulación del vector a es igual a cero.

La condición necesaria y suficiente para que un campo a, dado en un recinto superficial simplemente conexo, sea potencial, es que se cumpla la condición $\operatorname{rot} a = 0$, o sea, que el campo sea irrotacional.

Problemas:

4401. Hallar el módulo y la dirección del gradiente del campo $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ en los puntos: a) $O(0, 0, 0)$; b) $A(1, 1, 1)$; c) $B(2, 0, 1)$. ¿En qué punto el gradiente del campo es igual a cero?

4401.1. Sea

$$u = xy - z^2.$$

Hallar el módulo y la dirección del gradiente $\operatorname{grad} u$ en el punto $M(-9, 12, 10)$. ¿A qué es igual la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en dirección de la bisectriz del ángulo coordenado xOy?

4402. ¿En qué puntos del espacio $Oxyz$ el gradiente del campo

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

a) es perpendicular al eje Oz;
b) es paralelo al eje Oz;
c) es igual a cero?

4403. Se considera el campo escalar

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. ¿En qué puntos del espacio $Oxyz$ se verifica la igualdad

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

4404. Construir la superficie de nivel del campo escalar

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Hallar la superficie de nivel que pasa por el punto $M(9, 12, 28)$. ¿A qué es igual el máx u en el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$?

4405. Hallar el ángulo φ formado por los gradientes del campo

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

en los puntos $A(1, 2, 2)$ y $B(-3, 1, 0)$.

4406. Se considera el campo escalar

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Construir la superficie de nivel y la superficie de igual módulo del gradiente del campo.

Hallar $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad} u|$, $\sup|\operatorname{grad} u|$ en el recinto $1 < z < 2$.

4407. Con una precisión hasta de infinitésimos de orden superior, hallar la distancia en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) entre dos superficies de nivel infinitamente próximas

$$u(x, y, z)=c \text{ y } u(x, y, z)=c+\Delta c,$$

donde u $(x_0, y_0, z_0)=c$ (grad u $(x_0, y_0, z_0)\neq 0$).

4408. Demostrar las fórmulas:
a) grad $(u+c)=$ grad u (c es una constante);
b) grad $cu=c$ grad u (c es una constante);
c) grad $(u+v)=$ grad $u+$ grad v;
d) grad $uv=v$ grad $u+u$ grad v;
e) grad $(u^2)=2u$ grad u;
f) grad $f'(u)=f'(u)$ grad u.

4409. Calcular: a) grad r; b) grad r^2; c) grad $\frac{1}{r}$, si $r=xi+yj+zk$

4410. Hallar grad $f(r)$, si $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4411. Hallar grad (cr), si c es un vector constante y r es el radio vector desde el origen de coordenadas.

4412. Hallar grad$\{|c\times r|^2\}$ (c es un vector constante).

4413. Demostrar la fórmula

$$\text{grad} f(u, v)=\frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}\, u+\frac{\partial f}{\partial v}\text{grad}\, v.$$

4414. Demostrar la fórmula

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v,$$

donde

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Demostrar que, si la función $u=u(x, y, z)$ es diferenciable en un recinto convexo Ω y $|\text{grad}\, u|\leqslant M$, donde M es una constante, entonces, para cualesquiera puntos A, B de Ω, se tiene:

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\varrho(A, B),$$

donde $\varrho(A, B)$ es la distancia entre los puntos A y B.

4415.1. Expresar el grad u para una función $u=u(x, y, z)$: a) en coordenadas cilíndricas; b) en coordenadas esféricas.

4416. Hallar la derivada del campo $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ en un punto dado $M(x, y, z)$ en dirección del radio vector r de este punto.

¿En qué caso esta derivada es igual al módulo del gradiente?

4417. Hallar la derivada del campo $u=\frac{1}{r}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, en la dirección l $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

4418. Hallar la derivada del campo $u=u(x, y, z)$ en la dirección del gradiente del campo $v=v(x, y, z)$.

¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

4419. Expresar el campo vectorial

$$a=c\times\text{grad}\, u,$$

mediante los versores de la base, si

$$u=\text{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ y } c=i+j+k.$$

4420. Hallar las líneas de fuerza del campo vectorial

$$a=xi+yj+2zk.$$

4421. Efectuando un cálculo directo, demostrar que la divergencia de un vector a no depende del sistema rectangular de coordenadas elegido.

4422. Demostrar que

$$\text{div}\, a(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S a_n dS,$$

donde S es una superficie cerrada que encierra al punto M y limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S, $d(S)$ es el diámetro de la superficie S.

4422.1. Hallar la divergencia del campo

$$a=\frac{-ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

en el punto M (3, 4, 5). ¿A qué es igual, aproximadamente, el flujo Π del vector a a través de una esfera infinitésima $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\epsilon^2$?

4423. Hallar

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Demostrar que

a) $\operatorname{div}(a+b)=\operatorname{div} a+\operatorname{div} b$; b) $\operatorname{div}(uc)=c \operatorname{grad} u$ (c es un vector constante, u es un escalar);

c) $\operatorname{div}(ua)=u \operatorname{div} a+a \operatorname{grad} u$.

4425. Hallar div (grad u).

4426. Hallar div [grad $f(r)$], donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. ¿En qué caso div [grad $f(r)$] = 0?

4427. Calcular: a) div r; b) div $\frac{r}{r}$.

4428. Calcular div $[f(r)c]$, donde c es un vector constante.

4429. Hallar div $[f(r)r]$. ¿En qué caso la divergencia de este vector es igual a cero?

4430. Hallar: a) div (u grad u); b) div (u grad v).

4431. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje Oz en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj con una velocidad angular ω. Hallar la divergencia del vector de la velocidad v y del vector de la aceleración w en el punto $M(x, y, z)$ del espacio en un instante dado de tiempo.

4432. Hallar la divergencia de un campo de fuerzas de gravitación engendrado por un sistema finito de centros de atracción.

4433. Hallar la expresión de la divergencia de un vector del plano $a=a(r, \varphi)$ en coordenadas polares r y φ.

4434. Expresar la div $a(x, y, z)$ en coordenadas curvilíneas ortogonales u, v, w, si:

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w).$$

Como un caso particular, obtener la expresión de la div a en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Indicación. Examinar el flujo del vector a a través de un paralelepípedo infinitésimo, limitado por las superficies

$$u=\text{const}, \quad v=\text{const}, \quad w=\text{const}.$$

4435. Demostrar que:

a) $\operatorname{rot}(a+b)=\operatorname{rot} a+\operatorname{rot} b$;

b) $\operatorname{rot}(ua)=u \operatorname{rot} a+\operatorname{grad}(u \times a)$.

4436. Hallar: a) rot r; b) rot $[f(r)r]$.

4436.1. Hallar el módulo y la dirección del rot a en el punto $M(1, 2, -2)$, si

$$a=\frac{y}{z}i+\frac{z}{x}j+\frac{x}{y}k.$$

4437. Hallar: a) rot $cf(r)$. b) rot $[c \times f(r)r]$ (c es un vector constante).

4438. Demostrar que $\operatorname{div}(a \times b)=b \operatorname{rot} a-a \operatorname{rot} b$.

4439. Hallar: a) rot (grad u); b) div (rot a).

4440. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje l {cos α, cos β, cos γ} con una velocidad angular constante ω. Hallar el rotor del vector de la velocidad lineal v en un punto del espacio $M(x, y, z)$ en un instante dado.

4440.1. Hallar la expresión del rotor de un vector del plano $a=a(r, \varphi)$ en coordenadas polares r y φ.

4440.2. Expresar rot $a(x, y, z)$

a) en coordenadas cilíndricas;

b) en coordenadas esféricas.

4441. Hallar el flujo del vector r:

a) a través de la superficie lateral del cono $x^2+y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;

b) a través de la base de este cono.

4442. Hallar el flujo del vector $a=iyz+jxz+kxy$:

a) a través de la superficie lateral del cilindro $x^2+y^2 \leqslant a^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;

b) a través de la superficie total de este cilindro.

4443. Hallar el flujo del radio vector r a través de la superficie

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1).$$

4444. Hallar el flujo del vector $a=x^2i+y^2j+z^2k$ a través del octante positivo de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4445. Hallar el flujo del vector $a = yi + zj + xk$ a través de la superficie total de la pirámide, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

Comprobar el resultado, aplicando la fórmula de Ostrogradski.

4445.1. Hallar el flujo del vector

$$a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$$

a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Demostrar que el flujo de un vector a a través de una superficie S, dada por la ecuación $r = r(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, es igual a

$$\iint_S a_n dS = \iint_\Omega \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\, dv,$$

donde $a_n = an$ y n es el vector unitario de la normal a la superficie S.

4447. Hallar el flujo del vector $a = m \frac{r}{r^3}$ (m es una constante) a través de una superficie cerrada S que encierre al origen de coordenadas.

4448. Hallar el flujo del vector

$$a(r) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

donde e_i son constantes y r_i son las distancias de los puntos M_i (los manantiales) al punto variable M (r), a través de una superficie cerrada S que encierra a los puntos M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

4449. Demostrar que

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u\, dx\, dy\, dz,$$

donde la superficie S limita al cuerpo V.

4450. La cantidad de calor que penetra en un campo de temperaturas u en una unidad de tiempo a través de un elemento de superficie dS, es igual a

$$dQ = -kn \operatorname{grad} u\, dS,$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica interior y n es el vector unitario de la normal a la superficie S. Determinar la cantidad de calor acumulada por el cuerpo V en una unidad de tiempo. Sirviéndose de la velocidad de crecimiento de la temperatura, deducir la ecuación a la que satisface la temperatura del cuerpo (ecuación de propagación del calor).

4451. Un fluido incompresible en movimiento ocupa un volumen V. Suponiendo que en el recinto V no hay manantiales y sumideros, deducir la ecuación de continuidad

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div}(\varrho v) = 0.$$

donde $\varrho = \varrho(x, y, z)$ es la densidad del fluido, v es el vector de la velocidad, t es el tiempo.

Indicación. Examinar el flujo del fluido a través de un volumen arbitrario ω contenido en V.

4452. Hallar el trabajo del vector $a = r$ a lo largo del arco de hélice

$$r = ia \cos t + ja \sin t + kbt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4452.1. Hallar el trabajo del campo

$$a = \frac{1}{y} i + \frac{1}{z} j + \frac{1}{x} k$$

a lo largo del segmento rectilíneo que une los puntos $M(1, 1, 1)$ y $N(2, 4, 8)$.

4452.2. Hallar el trabajo del campo

$$a = ie^{y-z} + je^{z-x} + ke^{x-y}$$

a lo largo del segmento rectilíneo que une los puntos $O(0, 0, 0)$ y $M(1, 3, 5)$.

4452.3. Hallar el trabajo del campo

$$a = (y + z)\, i + (2 + x)\, j + (x + y)\, k$$

a lo largo del arco más corto de la circunferencia mayor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que une los puntos $M(3, 4, 0)$ y $N(0, 0, 5)$.

4453. Hallar el trabajo del vector $a = f(r)\, r$, donde f es una función continua, a lo largo de un arco AB.

4454. Hallar la circulación del vector

$$a = -yi + xj + ck$$

(c es una constante): a) a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; b) a lo largo de la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4455. Hallar la circulación Γ del vector $a = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$ a lo largo de un circuito C en dos casos: a) C no encierra al eje Oz; b) C encierra al eje Oz.

4455.1. Se considera el campo vectorial

$$a = \frac{y}{\sqrt{z}} i - \frac{x}{\sqrt{z}} j + \sqrt{xy} k.$$

Calculando rot a en el punto $M(1, 1, 1)$, hallar aproximadamente la circulación Γ del campo a lo largo de la circunferencia infinitésima

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2, \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0,\end{array}\right\}$$

donde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4456. El flujo de un fluido en el plano en régimen permanente se caracteriza por el vector de la velocidad

$$w = u(x, y)\, i + v(x, y)\, j.$$

Determinar: 1) la cantidad de fluido Q que penetra a través de un circuito cerrado C que limita un recinto S (consumo de fluido); 2) la circulación Γ del vector de la velocidad a lo largo del circuito C. ¿A qué ecuaciones satisfacen las funciones u y v, si el fluido es incompresible y el flujo es irrotacional?

4457. Comprobar que el campo

$$a = yz(2x + y + z)\, i + xz(x + 2y + z)\, j + xy(x + y + 2z)\, k$$

es potencial y hallar el potencial del mismo.

4457.1. Cerciorándose que es potencial el campo

$$a = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} i - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} j - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} k,$$

hallar el trabajo del mismo a lo largo del camino que une en el octante positivo los puntos $M(1, 1, 3)$ y $N(2, 4, 5)$.

4458. Hallar el potencial del campo gravitatorio

$$a = -\frac{m}{r^3} r,$$

engendrado por una masa m situada en el origen de coordenadas.

4459. Hallar el potencial del campo gravitatorio engendrado por un sistema de masas m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) situadas en los puntos M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

4460. Demostrar que el campo $a = f(r)\, r$, donde $f(r)$ es una función uniforme continua, es potencial. Hallar el potencial de este campo.

4461. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{grad}_P \left\{\iiint_V \varrho(Q)\frac{dV}{r}\right\} = -\iint_S \varrho(Q)\, n\, \frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \varrho(Q)\frac{dV}{r},$$

donde S es una superficie que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S, r es la distancia entre los puntos $P(x, y, z)$ y $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

4462. Demostrar que, si $a = \operatorname{grad} u$, donde

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

y

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

entonces

$$\operatorname{div} a = \varrho(x, y, z)$$

(suponiendo que la integral correspondiente tiene sentido).

RESPUESTAS

PRIMERA PARTE

Capítulo I

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 22. $-1{,}01 < x < -0{,}99$. 23. $x \leqslant -8$; $x \geqslant 12$. 24. $x < -\frac{1}{2}$. 25. $0 < x < \frac{2}{3}$ 26. $|x| \leqslant 6$. 27. $x > -\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$.
31. La segunda. 32. Dos cifras. 33. No es superior al 0,41%. 34. $9{,}9102\ \text{cm}^2 \leqslant S \leqslant 10{,}0902\ \text{cm}^2$, $\Delta \leqslant 0{,}0902\ \text{cm}^2$, $\delta \leqslant 0{,}91\ \%$. 35. $3{,}93\ \text{g/cm}^3 \pm 0{,}27\ \text{g/cm}^3$, $\delta \leqslant 7{,}3\ \%$. 36. $\delta \leqslant 3{,}05\ \%$. 37. $172{,}480\ \text{m}^3 \leqslant v \leqslant 213{,}642\ \text{m}^3$, $v = 192{,}660\ \text{m}^3 \pm 20{,}982\ \text{m}^3$. $\delta \approx 12\ \%$. 38. $\Delta \leqslant 0{,}17$ mm. 39. $\Delta < 0{,}0005$ m. 42. a) $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; b) $N \geqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$;

c) $N \geqslant 1 + \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; d) $N \geqslant \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0{,}999} \approx 2330 \lg \frac{1}{\varepsilon}$ 43. a) $N \geqslant E$. b) $N \geqslant \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; c) $N \geqslant 10^{10}$. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{1}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$ 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{2}$ 53. $\frac{1}{3}$.
54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1. 57. 2. 67. a) la segunda; b) la primera; c) la segunda. 72. $e = 2{,}71828\ldots$ 92. Es igual a 1, si $a \neq 0$ y pertenece a $[-1, 1]$, o no existe, si $a = 0$. 96. $x_3 = 1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100} = \frac{1}{20}$. 98. $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{432}$.
99. $x_4 = x_5 = -120$. 100. $x_{10} = 20$. 101. 0; 1; 1; 1. 101.1. $-3\frac{1}{2}$; 5; -2, 2.
102. -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. 103. 0; 2; 0; 2. 104. -4; 6; -4, 6. 105. $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1.
106. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 107. $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. 108. 0; $+\infty$; 0; $+\infty$.
109. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 110. -5; 1,25; 0; 0. 111. $-\frac{1}{2}$; 1. 112. $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $e + 1$. 113. 0; 1. 114. 1; 2. 115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; 0.

118. Los números reales comprendidos entre 0 y 1, incluyendo estos últimos.
119. 1; 5. 120. a; b. 127. a) es divergente; b) puede ser tanto convergente como
divergente. 128. a) no se puede; b) no se puede. 129. No. 130. No. 144. a) 0;
b) 0. 147. ln 2.

148. $\frac{1}{3}(a+2b)$. 151. $-\infty < x < +\infty$, $x \neq -1$. 152. $-\infty < x \leqslant -\sqrt{3}$ y
$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. 153. $-1 \leqslant x < 1$. 154. a) $|x| > 2$; b) $x > 2$. 155. $4k^2\pi^2 \leqslant x \leqslant$
$\leqslant (2k+1)^2\pi^2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. 156. $|x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ y $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leqslant x \leqslant$
$\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ $(k=1, 2, \ldots)$. 157. $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ y $-\frac{1}{2k+1} < x <$
$< -\frac{1}{2k+2}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. 158. $x > 0$, $x \neq n$ $(n=1, 2, \ldots)$. 159. $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$.
160. $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 161. $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$
$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 162. $x=-1, -2, -3, \ldots$ y $x \geqslant 0$. 163. $x < 0$,
$x \neq -n$ $(n=1, 2, \ldots)$. 164. $1 < x \leqslant 2$. 165. $x=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

165.1. $x > 4$. 165.2. $k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

165.3. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$. 166. $-1 \leqslant x \leqslant 2$; $0 \leqslant y \leqslant 1\frac{1}{2}$.

167. $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $-\infty < y \leqslant \lg 3$.

168. $-\infty < x < +\infty$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$. 169. $1 \leqslant x \leqslant 100$; $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. 170. $x = \frac{p}{2q+1}$,
donde p y q son números enteros; $y = \pm 1$. 171. $P = 2b + 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x$ $(0 < x < h)$;
$S = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ $(0 < x < h)$. 172. $a = \sqrt{100 - 96\cos x}$ $(0 < x < \pi)$;
$S = 24\sin x$ $(0 < x < \pi)$. 173. $S = \frac{h}{a-b}x^2$, si $0 \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{2}$; $S = h\left(x - \frac{a-b}{4}\right)$,
si $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$; $S = h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$, si $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant a$.

174. $m(x) = 0$, si $-\infty < x \leqslant 0$; $m(x) = 2x$, si $0 < x \leqslant 1$; $m(x) = 2$, si
$1 < x \leqslant 2$; $m(x) = 3$, si $2 < x \leqslant 3$; $m(x) = 4$, si $3 < x < +\infty$.
178. $E_y = \{0 \leqslant y \leqslant 4\}$. 179. $E_y = \{1 < y < 3\}$. 180. $E_y = \{0 < y < 1\}$.
181. $E_y = \{1 \leqslant |y| < +\infty\}$. 182. $E_y = \{1 \leqslant y \leqslant 2\}$. 183. $a < y < b$ si $a < b$
y $b < y < a$ si $a > b$. 184. $1 < y < +\infty$. 185. $0 > y > -\infty$ y $+\infty > y > 1$.

186. $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$. 187. $+\infty > y > -\infty$. 188. $0 < y < \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2} \leqslant y < 2$.

189. 0; 0; 0; 0; 24. 190. 0; -6; 4. 191. 1; 1; 1; 2.

192. -1; 0; 1; 2; 4. 193. 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$,
$\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 194. a) $f(x)=0$, si $x=-1$, $x=0$ y $x=1$; $f(x) > 0$, si
$-1 < x < 0$ y $1 < x < +\infty$;
$-\infty < x < -1$ y $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, si
b) $f(x)=0$, si $x = \pm\frac{1}{k}$; $f(x) > 0$, si $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ y $-\frac{1}{2k+1} <$
$< x < -\frac{1}{2k+2}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; $f(x) < 0$, si $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ y $-\frac{1}{2k} <$
$< x < -\frac{1}{2k+1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; c) $f(x)=0$, si $x \leqslant 0$ y $x=1$; $f(x) > 0$,
si $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, si $1 < x < +\infty$. 195. a) a; b) $2x+h$; c) $a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$.

197. $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$; $f(1) = \frac{1}{3}$; $f(2) = 2\frac{2}{3}$. 198. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$; $f(-1) =$
$= -\frac{2}{3}$; $f(0,5) = 2\frac{17}{24}$. 199. $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$. 200. $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$.
203. a) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; b) $1 < x < e$; c) $x > 0$,
$x \neq k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. 205. a) $z = x+y$; b) $z = \frac{xy}{x+y}$; c) $z = \frac{x+y}{1-xy}$;
d) $z = \frac{x+y}{1+xy}$. 206. $\varphi(\varphi(x)) = x^4$; $\psi(\psi(x)) = 2^{2^x}$; $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$; $\psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$.
207. $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$; $\psi(\psi(x)) = x$ $(x \neq 0)$; $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$ $(x \neq 0)$.
208. $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$; $\psi(\varphi(x)) = \psi(x)$; $\psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$. 209. $-\frac{1-x}{x}$;
x $(x \neq 0, x \neq 1)$. 210. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 211. $x^2 - 5x + 6$. 212. $x^2 - 2$ $(|x| \geqslant 2^{1/2})$.

213. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. 213.1. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. 221. a) Es creciente para $a > 0$ y
decreciente para $a < 0$; b) para $a > 0$ es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$
y es creciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; c) es creciente; d) si $ad - bc >$
> 0 es creciente en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ y $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$. e) es
creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$. 222. Es posible, si la base
de los logaritmos es mayor que 1.
224. $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty < y < +\infty)$. 225. a) $-\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$;
b) $\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$. 226. $\frac{1-y}{1+y}$ $(y \neq -1)$. 227. a) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$;
b) $\sqrt{1-y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. 228. $\operatorname{Arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ $(-\infty < y < +\infty)$.
229. $\operatorname{Arth} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1 < y < 1)$. 230. $x = y$, si $-\infty < y < 1$; $x = \sqrt{y}$,
si $1 \leqslant y \leqslant 16$; $x = \log_2 y$, si $16 < y < +\infty$. 231. a) Es impar; b) es
par; c) es par; d) es impar; e) es impar. 233. a) Es periódica $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; b) es

periódica; $T = 2\pi$; c) es periódica, $T = 6\pi$; d) es periódica, $T = \pi$; e) no es pe-
riódica; f) es periódica, $T = \pi$; g) no es periódica; h) no es periódica.

241. $t=1\frac{2}{3}$ seg. $x=-3\frac{1}{3}$ m. 243. $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 244. $y=x-\frac{x^2}{36\,000}$; 9 km; 36 km. 251. $x_0=-\frac{d}{c}$; $y_0=\frac{a}{c}$. 252. $p=\frac{12}{v}$ $(v>0)$. 263. $k=\frac{a}{a_1}$, $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$, $n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^2}(a_1b-ab_1)$, $x_n=-\frac{b_1}{a_1}$. 264. $y=\frac{10}{x^2}$. 287. $A=\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin x_0=-\frac{a}{A}$, $\cos x_0=\frac{b}{A}$. 356. $y=2\sin x$, si $|x-\pi k|\leqslant\frac{\pi}{6}$, e $y=(-1)^k$, si $\frac{\pi}{6}<|x-\pi k|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. 357. a) $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$; b) y c) $y=x^2$, si $x\geqslant0$; $y=0$, si $x<0$; d) $y=x$, si $x<0$; $y=x^4$, si $x\geqslant0$. 358. a) $y=1$; b) $y=1$, si $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$; $y=0$, si $|x|<1$ si $|x|>\sqrt{3}$; c) $y=1$, si $|x|\leqslant1$; $y=2$, si $|x|>1$; d) $y=-2$, si $|x|>2$; $y=2-(2-x^2)^2$, si $|x|\leqslant2$.

359. Para $x<0$, se tiene: a) 1) $f(x)=1+x$, 2) $f(x)=-(1+x)$; b) 1) $f(x)=-2x-x^2$, 2) $f(x)=2x+x^2$, c) 1) $f(x)=\sqrt{-x}$, 2) $f(x)=-\sqrt{-x}$; d) 1) $f(x)=-\sin x$, 2) $f(x)=\sin x$; e) 1) $f(x)=e^{-x}$, 2) $f(x)=-e^{-x}$; f) 1) $f(x)=\ln(-x)$, 2) $f(x)=-\ln(-x)$. 360. a) $x=-\frac{b}{2a}$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{b-a}{2}$; d) $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. 361. a) (x_0, ax_0+b), donde x_0 es arbitrario; b) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$; c) (x_0, y_0), donde $x_0=-\frac{b}{3a}$, $y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$; d) $(2, 0)$; e) $(2, 1)$. 372. Las raíces son: $-1{,}88$; $0{,}35$; $1{,}53$. 373. $2{,}11$; 374. $0{,}25$; $1{,}49$. 375. $0{,}64$. 376. $1{,}37$; 10. 377. $-0{,}54$. 378. 0; $-0{,}25$; $-1{,}86$. 4,49. 379. $x_1=-0{,}57$, $y_1=-1{,}26$; $x_2=-0{,}42$, $y_2=1{,}19$; $x_3=0{,}45$, $y_3=0{,}74$; $x_4=0{,}54$, $y_4=-0{,}68$. 380. $x_1=-1{,}30$, $y_1=9{,}91$; $x_2=2{,}30$, $y_2=9{,}73$; $x_3=-0{,}62$, $y_3=-9{,}98$; $x_4=1{,}62$, $y_4=-9{,}87$. 382. a) En general, no; b) si. 385. Está acotada superiormente pero no está acotada inferiormente. 387. $f(a)$ y $f(b)$.

388. 0; 25 389. 0; 1. 390. 0; 1. 391 2; $+\infty$. 392. -1; 1. 393. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 394. $\frac{1}{2}$; 4. 395. a) 0, 1; b) 0; 2. 396. 0; 1. 397. a) 8; b) 0,8; c) 0,08; d) 0,008. 398. a) π; b) π; c) π; d) π. 411. a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2}$.

412. 6. 413. 10. 414. $\frac{1}{2}nm(n-m)$ 415. 5^{-5}. 416. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. 417. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. 418. $-\frac{1}{2}$. 419. $\frac{1}{2}$. 420. 1. 421. $\frac{1}{4}$. 422. $\frac{1}{3}$. 423. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. 424. $\frac{n(n+1)}{2}$. 424.1. $2\frac{1}{24}$. 425. $\frac{m}{n}$. 426. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 427. $\frac{n(n+1)}{2}$. 428. $\frac{m-n}{2}$. 429. $x+\frac{a}{2}$. 430. $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. 431. 1. 432. $\frac{1}{2}$. 433. 3. 434. $\frac{ab}{3}$. 435. 1. 436. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

437. $\frac{4}{3}$. 438. -2. 439. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. 440. $-\frac{1}{16}$. 441. $\frac{1}{144}$. 442. $\frac{1}{4}$. 443. $\frac{12}{5}$. 444. $\frac{1}{n}$. 445. -2. 446. $\frac{1}{4}$. 447. $\frac{2}{27}$. 448. $\frac{3}{2}$. 449. $4\frac{4}{27}$. 450. $\frac{7}{36}$. 451. $-\frac{1}{2}$. 452. $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. 453. $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. 455. $\frac{n}{m}$. 455.1. $\frac{1}{2}$. 456. $\frac{1}{n!}$. 457. $\frac{1}{2}(a+b)$. 458. $\frac{1}{2}$. 459. $-\frac{1}{4}$. 460. 1. 461. $\frac{2}{3}$. 462. 2. 463. $\frac{4}{3}$. 464. $-\frac{1}{4}$. 465. $\frac{1}{n}\times(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. 466. 2^n. 467. $2n$ 468. $\lim\limits_{a\to0}x_1=\infty$, $\lim\limits_{a\to0}x_2=-\frac{c}{b}$. 469. $a=1$, $b=-1$. 470. $a_i=\pm1$; $b_i=\mp\frac{1}{2}$ $(i=1, 2)$. 471. 5. 472. 0. 473. $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. 474. $\frac{1}{2}$. 474.1. 1. 474.2. $\frac{1}{3}$. 475. $\frac{1}{2}$. 476. 2. 477. 4. 478. $\frac{1}{p}$. 479. $\frac{1}{2}$. 480. $\frac{2}{\pi}$. 482. $\cos a$. 483. $-\sin a$. 484. $\sec^2 a\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm1, \ldots\right)$ 485. $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, donde k es entero). 486. $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, donde k es entero). 487. $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, donde k es entero). 488. $-\sin a$. 489. $-\cos a$. 490. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$, donde k es entero. 491. $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a\neq k\pi$, donde k es entero). 492. $\frac{3}{2}\sin 2a$. 493. -3. 494. 14: 495. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 496. -24. 497. $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$, donde k es entero$\left.\right)$. 498. $\frac{3}{4}$. 499. $\frac{1}{4}$. 500. $\frac{4}{3}$. 501. $-\frac{1}{12}$. 502. $\sqrt{2}$. 503. 0. 504. 3. 505. 0. 506. a) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. 507. 0. 508. 0. 509. 0. 510. 0. 511. 1 512. e^3. 513. 1. 514. e^{-2}. 515. e^{2a}. 516. 0, si $a_1<a_2$; $+\infty$, si $a_1>a_2$, $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$, si $a_1=a_2$. 517. e. 518. e^{-1}. 519. 1. 519.1. $\sqrt{e}$.

520. $e^{\operatorname{ctg} a}$ ($a\neq k\pi$ k es entero). 521. $e^{\frac{3}{2}}$. 522. e^{-1}. 523. 1. 524. e^{-2}. 525. e. 526. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 527. e^{x+1}. 528. $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 529. 1. 530. 1. 531. $\frac{1}{a}$. 532. 0. 533. $\frac{1}{5}$. 534. -2. 535. $\frac{3}{2}$. 536. $\frac{3}{2}$. 537. $-\frac{\log e}{x^2}$. 538. $\frac{2a}{b}$. 539. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 540. 0. 540.1. n. 541. $\ln a$. 542. $a^a\ln\frac{a}{e}$. 543. $a^a\ln ea$. 544. e^2. 545. $\frac{2}{3}$. 545.1. $e^{\beta^2-\alpha^2}$. 545.2. $\frac{\alpha}{\beta}$. 545.3. -2. 546. e^2. 547. 1. 548. $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. 549. $a^b\ln a$. 550. $a^x\ln^2 a$. 551. $e^{-(a+b)}$. 552. $\ln x$. 553. $\ln x$. 554. $\sqrt[a]{b}$. 555. $\sqrt{ab}$. 556. $\sqrt[3]{abc}$. 557. $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 559. $\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}$. 560. $a^{a^a}\ln a$. 561. a) 0; б) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. 562. 3.— ln 2.
566. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. 567. 1. 568. 0. 569. $\ln a^2$. 570. $\frac{1}{8}$. 571. 572. — 2.
573. e^2. 574. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 575. $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. 576. a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 1. 576.1. $\frac{2}{9}\,2\operatorname{sh}\frac{1}{2}$.
577.1. a) ch a; b) sh a. 577.2. — 1. 578. ln 2. 579. 1. 580. e^{π}. $-\frac{\pi}{2}$.
582. $\frac{\pi}{3}$. 583. $-\frac{\pi}{2}$. 584. $\frac{3\pi}{4}$. 585. $\frac{1}{1+x^2}$. 586. 2. 587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. t. 589. 1.
590. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 591. 0. 592. 0. 593. a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$. 594. a) -1; b) k.1. $\ln\frac{b^2}{a^2}$.
595. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$. 596. a) 1; b) 0. 597. a) 0; b) 1. 600. 2. 601. 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. 602. 0. 603. 1. 604. 0. 605. 1. 606. 0. 61 $=1$, si $|x|<1$; $y=0$, si $|x|=1$. 614. b) $y=0$, si $0\leqslant x<\frac{1}{2}$, si $x=1$; $y=1$, si $1<x<+\infty$. 615. $y=-1$, si $0<|x|$ $=0$, si $|x|=1$; $y=1$, si $|x|>1$. 616. $y=|x|$. 617. $y=1$, si $\leqslant 1$; $y=x$, si $x>1$. 618. $y=1$, si $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x$, si $1<$ $y=\frac{x^2}{2}$, si $x\geqslant 2$. 619. $y=0$, si $0\leqslant x<2$; $y=2\sqrt{2}$, si $x=2$; y si $x>2$.
620. b) $y=0$, si $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y=1$, si $x=(2k+1)$ $=0$, ± 1, ± 2; ...). 621. $y=\ln 2$, si $0\leqslant x\leqslant 2$; $y=\ln x$, si $x>2$. $y=0$, si $-1<x\leqslant 1$; $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$, si $x>1$. 623. $y=1$, si x; $y=e^{x-1}$, si $x>-1$. 624. $y=x$ si $x<0$; $y=\frac{1}{2}$ si $x=0$; $y=$ $x>0$
625. $\frac{1}{x}$. 625.1. $y=\sqrt{x}$ si $0\leqslant x<1$ y $4k-1<x<4k$ $y=x$ si $4k-3<x<4k-2$ y $4k-2<x<4k-1$; $y=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+x)$ $x=2k-1$ (k = 1, 2, 3, ...). 625.2. y = 0, si x es racional; $y=x$, sirracional.
625.3. El contorno del cuadrado max $\{|x|, |y|\}=1$. a) $x=1$, $x=-2$, $y=x-1$; b) $y=x+\frac{1}{2}$ si $x\to+\infty$, $y=-x-\frac{1}{2}$ $x\to-\infty$;
c) $y=\frac{1}{3}-x$; d) $y=x$ si $x\to+\infty$, $y=0$ si $x\to$ e) $y=0$ si $x\to-\infty$, $y=x$ si $x\to+\infty$; f) $y=x+$ 628. 0.
629. $\frac{1}{1-x}$. 630. $\frac{\sin x}{x}$. 632. $\frac{1}{6}$. 633. $\frac{a}{2}$. 634. $\frac{1}{2}\ln a$. 635, 636. $e^{-\frac{c^2}{6}}$.
637. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. 637.1. $\frac{2}{3}$. 637.2. $\frac{b}{1-\alpha}$. 6 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
638. $\sqrt{1+x}-1$. 639. $1-\sqrt{1-x}$. 641. a) 2; b) $+\infty$; c) 0 e) 2; f) 1; g) 2 sh 1. 643. a) $l=-1$, $L=2$; b) $l=-2$, $L=2$; $=2$, $L=e$.

644. a) $l=-1$, $L=1$; b) $l=0$, $L=+\infty$; c) $l=\frac{1}{2}$, $L=2$; d) $l=0$, $L=+\infty$. 645. a) De primer orden; b) de segundo; c) de primero; d) de tercero; e) de tercero; f) de tercero. 653. a) $2x$; b) x; c) $\frac{x^2}{2}$; d) $\frac{x^3}{2}$. 655. a) $3(x-1)^2$; b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $x-1$; d) $e(x-1)$; e) $x-1$. 656. a) x^2; b) $2x^2$; c) $x^{\frac{2}{3}}$; d) $x^{\frac{1}{8}}$. 657. a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$.
658. a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-x}$; e) $\frac{1}{x-1}$. 663. a) $9{,}95<x<10{,}05$; b) $9{,}995<x<10{,}005$; c) $9{,}9995<x<10{,}0005$; d) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. 664. $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; a) $\Delta<3{,}7$ mm; b) $\Delta<0{,}37$ mm; c) $\Delta<0{,}037$ mm. 665. $100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2$; a) $81<x<121$; b) $98{,}01<x<102{,}01$; c) $99{,}8001<x<100{,}2001$; d) $99{,}980001<x<100{,}020001$. 666. $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$.
667. $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx 0{,}001x_0^2$; a) $\delta\approx 10^{-5}$; b) $\delta\approx 10^{-7}$; c) $\delta\approx 10^{-9}$. No es posible. 669. a) No; b) si. 671. No; que está acotada en el punto x_0. 672. No; si la función $f(x)$ está definida en un intervalo finito (a, b), entonces siempre se verifican estas desigualdades, mas, si al menos a o b es igual al símbolo ∞, entonces $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. 673. No; la unicidad y continuidad de la función inversa. 675. Es continua. 676. Es continua si $A=4$, y es discontinua para $x=2$, si $A\neq 4$. 677. Es continua para $x=-1$. 678. a) Es continua; b) es discontinua para $x=0$. 679. Es discontinua para $x=0$. 680. Es continua 681. Es continua. 682. Es discontinua para $x=1$. 683. Es continua para $a=0$ y es discontinua para $a\neq 0$. 684. Es discontinua para $x=0$. 685. Es discontinua para $x=k$ (k es entero). 686. Es discontinua para $x=k^2$ (k = 1, 2, ...). 687. $x=-1$ es un punto de discontinuidad infinita. 688. $x=-1$ es un punto de discontinuidad evitable. 689. $x=-2$ y $x=1$ son puntos de discontinuidad infinita. 690. $x=0$ y $x=1$ son puntos de discontinuidad evitable; $x=-1$ es un punto de discontinuidad infinita. 691. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $x=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, ...$) son puntos de discontinuidad infinita. 692. $x=\pm 2$ son puntos de discontinuidad evitable. 693. $x=0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 694. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, ...$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie; $x=0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie.
695. $x=0$ y $x=\frac{2}{2k+1}$ ($k=0, \pm 1, ...$) son puntos de discontinuidad evitable. 696. $x=0$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie. 697. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable. 698. $x=0$ es un punto de disconti-

nuidad de 2ª especie. 699. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $x = 1$ es un punto de discontinuidad infinita. 700. $x = 0$ es un punto de discontinuidad infinita; $x = 1$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 701. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm a, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 702. $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 703. $x = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 704. La función es continua. 705. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 706. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie; $x=0$ es un punto de discontinuidad infinita. 707. $x=\frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie; $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable. 708. $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie; $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 709. $x=\pm\frac{1}{k}$ y $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k=1, 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie, $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 710. $x=\frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad infinita; $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 711. $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad infinita; $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 712. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 713. $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 714. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad infinita. 715. $x = \pm\sqrt{k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad infinita. 716. $x = -1$ y $x = 3$ son puntos de discontinuidad infinita. 717. $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2ª especie. 718. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable. 719. $x = \pm 1$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie. 720. $y = 1$, si $0 \leqslant x < 1$; $y=\frac{1}{2}$, si $x = 1$; $y = 0$, si $x > 1$; $x = 1$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie. 721. $y = \operatorname{sgn} x$; $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie. 722. $y = 1$, si $|x| \leqslant 1$; $y = x^2$, si $|x| > 1$. La función es continua. 723. $y = 0$, si $x \neq k$; $y = 1$, si $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); $x = k\pi$ son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 724. $y = x$, si $|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}$; $y = \frac{x}{2}$, si $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $y=0$, si $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$); $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 725. $y=\frac{\pi}{2}x$, si $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{\pi}{2}x$, si $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$; $y=0$,

si $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \ldots$); $x=\frac{k\pi}{2}$ — son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 726. $y = x$ para $x \leqslant 0$; $y = x^2$ para $x > 0$. La función es continua. 727. $y = 0$ para $x \leqslant 0$ e $y = x$ para $x > 0$. La función es continua. 728. $y = -(1 + x)$ para $x < 0$; $y = 0$ para $x = 0$ e $y = 1 + x$ para $x > 0$; $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie. 729. No. 730. $a = 1$. 731. a) La función es continua; b) $x = -1$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie; c) $x = -1$ es un punto de discontinuidad de 1ª especie; d) $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad infinita; e) $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) son puntos de discontinuidad de 2ª especie. 732. $d = -x$ si $-\infty < x < 0$; $d = 0$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$; $d = x - 1$ si $1 < x \leqslant \frac{3}{2}$; $d = 2 - x$ si $\frac{3}{2} < x < 2$; $d = 0$ si $2 \leqslant x \leqslant 3$; $d = x - 3$ si $3 < x < +\infty$. La función es continua. 733. $S=3y-\frac{y^2}{2}$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$; $S=\frac{1}{2}+2y$ si $1 < y \leqslant 2$; $S=\frac{5}{2}+y$ si $2 < y \leqslant 3$; $S=\frac{11}{2}$ si $3 < y < +\infty$; la función es continua, $b = 3 - y$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$; $b = 2$ si $1 < y \leqslant 2$; $b = 1$ si $2 < y \leqslant 3$; $b = 0$ si $3 < y < +\infty$; $x = 2$ y $x = 3$ son puntos de discontinuidad de 1ª especie. 735. Es discontinua para $x \neq 0$ y es continua para $x = 0$. 737. Es discontinua para todos los valores negativos y para todos los valores positivos racionales del argumento. 738. $f(0) = 0{,}5$. 740. a) 1,5; b) 2; c) 0; d) e; e) 0; f) 1; g) 0. 741. a) Sí; b) no. 742. a) No; b) no. 743. No. Ejemplo: $f(x)=1$ si x es racional y $f(x) = -1$ si x es irracional. 744. a) $f(g(x))$ es continua, $g(f(x))$ es discontinua para $x = 0$; b) $f(g(x))$ es discontinua para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, $g(f(x)) \equiv 0$ es continua; c) $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son continuas. 745. $f(\varphi(x)) \equiv x$. 759. $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$; $a + d = 0$. 760. $x = y - k$, si $2k \leqslant y < 2k + 1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).
764. $f(f(x)) \equiv x$. 767. $x=-\sqrt{y}$ ($0 \leqslant y < +\infty$); $x=\sqrt{y}$ ($0 \leqslant y < +\infty$).
768. $x=1-\sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leqslant 1$); $x=1+\sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leqslant 1$).
769. $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($-1 \leqslant y \leqslant 1$), $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($0 < |y| \leqslant 1$).
770. $x=(-1)^k \arcsin y + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ($-1 \leqslant y \leqslant 1$). 771. $x=2k\pi \pm \arccos y$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ($-1 \leqslant y \leqslant 1$). 772. $x=\operatorname{arctg} y + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ($-\infty < y < +\infty$). 776. $\varepsilon=0$, si $xy < 1$; $\varepsilon=\operatorname{sgn} x$, si $xy > 1$. 779. a) $y=-\frac{\pi}{2}$, si $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$; b) $y=-(\pi+4\arcsin x)$, si $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$, si $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y=\pi-4\arcsin x$, si $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$. 780. $y=\frac{\pi}{2}-x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.
781. $y=\sqrt{x^2-1}$ ($1 \leqslant x < +\infty$); $y=-\sqrt{x^2-1}$ ($1 \leqslant x < +\infty$). 782. Para todos los t, tales que $\varphi(t) = x$, donde x es un valor arbitrario de la función $\varphi(t)$, la función $\psi(t)$ tiene que tener un mismo valor. 783. El conjunto de valores $\chi(\tau)$ para $\alpha < \tau < \beta$ tiene que ser un intervalo (a, b). 784. Para todos los valores x, tales que $\varphi(x) = u$, donde u es un número arbitrario del inter-

valo (A, B), la función $\psi(x)$ tiene que tomar un mismo valor. **785.** $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ cm. a) 0,5 mm; b) 0,005 mm; c) 0,00005 mm. **786.** a) $\delta < \frac{1}{4}$; b) $\delta < 2{,}5 \cdot 10^{-4}$; c) $\delta < \frac{5}{2} \cdot 10^{-7}$; d) $\delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$ $(\varepsilon \leq 1)$. **793.** a) Sí; b) no. **794.** Es uniformemente continua. **795.** No es uniformemente continua. **796.** Es uniformemente continua. **797.** No es uniformemente continua. **798.** Es uniformemente continua. **799.** Es uniformemente continua. **800.** No es uniformemente continua. **802.** a) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; b) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; c) $\delta = 0{,}01\varepsilon$; d) $\delta = \varepsilon^2$ $(\varepsilon \leq 1)$; e) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; f) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3-\varepsilon}\right)$. **803.** $n \geq 1\,000\,000$. **808.** a) $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$; b) $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; c) $\omega_f(\delta) \leq \delta\sqrt{2}$. **818.** $f(x) = \cos ax$ o bien $f(x) = \operatorname{ch} ax$. **819.** $f(x) = \cos ax$; $g(x) = \pm \sin ax$ $(a = \text{const})$.

Capítulo II

821. $\Delta x = 999$; $\Delta y = 3$. **822.** $\Delta x = -0{,}009$; $\Delta y = 990\,000$. **823.** a) $\Delta y = a\Delta x$; b) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$; c) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. **825.** a) 5; b) 4,1; c) 4,01; d) $4 - \Delta x$; 4. **826.** $3 + 3h + h^2$; a) 3,31; b) 3,0301; c) 3,003001; 3. **827.** a) $v_m = 215 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$; b) $v_m = 210{,}5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$; c) $v_m = 210{,}05 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$; $210 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$. **828.** a) $2x$; b) $3x^2$; c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$; d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$; f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \ldots\right)$; g) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots)$; h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; j) $\frac{1}{1+x^2}$. **829.** -8; 0; 0. **830.** 4. **831.** $1 + \frac{\pi}{4}$. **832.** $f'(a)$. **834.** $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. **835.** $y' = x^2 + x - 2$; a) -2; 1; b) -1; 0; c) -4; 3. **836.** $10a^3x - 5x^4$. **837.** $\frac{a}{a+b}$. **838.** $2x - (a+b)$. **839.** $2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$. **840.** $x \sin 2a + \cos 2a$. **841.** $mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$. **842.** $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1 + 6x + 15x^2 + 14x^3)$. **842.1.** $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. **843.** $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$. **845.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$. **846.** $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. **847.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \neq 1)$. **848.** $\frac{12 - 6x - 6x^2 + 2x^3 + 5x^4 - 3x^5}{(1-x)^3}$ $(x \neq 1)$.

849. $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x \neq -1)$. **850.** $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} \times [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$ $(x \neq -1)$. **851.** $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x > 0)$. **852.** $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$. **853.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$. **854.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **855.** $\frac{6 + 3x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ $(x \neq \sqrt[3]{-3})$. **856.** $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$. **857.** $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x| < |a|)$. **858.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x| \neq 1)$. **859.** $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

860. $\frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x > 0)$. **861.** $\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$ $(x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8)$. **862.** $-2\cos x(1 + 2\sin x)$. **863.** $x^2 \sin x$. **864.** $-\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$. **865.** $n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$. **866.** $\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)]$. **867.** $\frac{2\sin x(\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \ldots)$. **868.** $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. **869.** $\frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \text{ es entero}\right)$. **870.** $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$. **871.** $\frac{2}{\sin^2 x}$; $(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **872.** $1 + \operatorname{tg}^6 x$ $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \ldots\right)$.

873. $\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$ $(x \neq k\pi, k \text{ es entero})$. **874.** $\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $\left(x \neq \frac{k\pi a}{2}, k \text{ es entero}\right)$.

875. $-3\operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x) \cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$ $\left(x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \text{ es entero}\right)$.

876. $-2xe^{-x^2}$. **877.** $-\frac{1}{x^2} 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \sec^2\frac{1}{x} \ln 2$. **878.** x^2e^x. **879.** $x^2e^{-x}\sin x$. **880.** $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x \neq 2k\pi, k \text{ es entero})$. **881.** $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$. **883.** $e^x[1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}})]$. **884.** $y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$ $(x > 0)$. **885.** $a^a \cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x \cdot a^{a^x}\ln^2 a$. **886.** $\frac{6}{x}\lg e \cdot \lg^2 x^2$ $(x \neq 0)$. **887.** $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ $(x > e)$. **888.** $\frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}$ $(x > e)$. **889.** $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x > -1)$. **890.** $\frac{x}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$. **891.** $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x \neq 0)$. **892.** $\frac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **893.** $\frac{2}{(1+x^2)(1-kx^2)}$ $(|x| < 1)$. **894.** $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$

$(x>-1)$. 895. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 896. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 897. $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$.

898. $\sqrt{x^2+a^2}$. 899. $\frac{1}{a-bx^2}\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. 900. $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$.

901. $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k es entero$)$ 902. $\frac{1}{\cos x}\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}\right.$ k es entero$\left.\right)$.

903. $-\operatorname{ctg}^2 x$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k es entero$)$. 904. $-\frac{1}{\cos x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi\right.$, k es entero$\left.\right)$. 905. $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k es entero$)$. 906. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. 907. $-\frac{\ln^2 x}{x^2}$ $(x>0)$.

908. $\frac{1}{x^3}\ln x$ $(x>0)$. 909. $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. 910. $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$.

911. $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. 912. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2}\right.$, k es entero$\left.\right)$.

913. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x|<2)$. 914. $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$. 915. $\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$. 916. $\frac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$. 917. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geq 0)$. 918. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$ $(|x|<1)$. 919. $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x\geq 0)$. 920. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$.

921. $\operatorname{sgn}(\cos x)\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k \text{ es entero}\right)$. 922. $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x\neq k\pi$, k es entero$)$. 923. $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2},\ k \text{ es entero}\right)$. 924. $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. 925. $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$. 926. 1 $\left(x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \text{ es entero}\right)$. 927. $\frac{1}{a+b\cos x}$.

928. $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$. 929. $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^2(x^2)}$ $(|x|<1)$. 930. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

931. $-2\cos x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$. 932. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$. 933. $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$. 934. $\sqrt{a^2-x^2}$. 935 $\frac{1}{x^3+1}$ $(x\neq -1)$. 936 $\frac{1}{x^4+1}$ $(|x|\neq 1)$.

937 $(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. 938. $-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. 939. $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(x>1)$.

940 $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$. 941. $\frac{x^3}{x^6+1}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 942. $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$.

943 $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ $(x<1)$. 944. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. 945. $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$

$(0<x<a)$. 946. $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$. 947. $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

948. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k \text{ es entero}\right)$. 949. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times$ $\times\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(|x|<1)$. 950. $\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$. 951. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. 952. $\frac{1}{2(1+x^2)}$

953. $\frac{\sin a\operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$ $(\cos x\neq\cos a)$. 954. $\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$.

955. $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x|\neq 1)$. 956. $\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. 957. $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0<|x|<\sqrt{\left(\ +\frac{1}{2}\right)\pi},\ k=0,1,\dots\right)$. 958. $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x|\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,\dots\right)$. 959. $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{m(\arcsin x)}\cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$. 960 $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

960.1. $\frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$.

960.2. $\frac{1}{x^3\cos\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}$.

960.3. $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\cdot\sin\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)}$. 961. $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\times$ $\times\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$ $(x>0)$. 962. $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+$ $+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$ $(x>0)$. 963. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$. 964. $(\sin x)^{1+\cos x}\times$ $\times(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x)\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k \text{ es entero}\right)$. 965. $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln(\ln x)]$ $(x>1)$. 965.1. $y'=$

$=2y\left\{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\operatorname{arctg}^2 x\left[\frac{\sin x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$ $\left(x\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,\ \pm 1,\dots\right)$. 966. $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,\ x\neq 1)$. 967. $\operatorname{th}^3 x$. 968. $-\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$ $(x>0)$. 969. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. 970. $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$ $(x\neq 0)$.

971. $\frac{a+b\operatorname{ch} x}{b+a\operatorname{ch} x}$. 972. $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. 973. $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln(\arccos x)$ $(|x|<1)$. 974. $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. 975. $-\frac{2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$ $(x\neq 0)$.

976. $\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arcctg} a^{-x}$ $(a>0)$. 977. a) $\operatorname{sgn} x$ $(x\neq 0)$; b) $2|x|$; c) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$.

978. a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; b) $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$; c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; d) $\pi[x]\sin 2\pi x$. 979. $y'=-1$ si $-\infty<x<1$; $y'=2x-3$ si $1\leqslant x\leqslant 2$; $y'=1$ si $2<x<+\infty$. 980. $y'=2(x-a)(x-b)\times$ $\times(2x-a-b)$ si $x\in[a,b]$; $y'=0$ si $x\in[a,b]$. 981. $y'=1$ si $x<0$; $y'=\frac{1}{1+x}$ si $0\leqslant x<+\infty$. 982. $y'=\frac{1}{1+x^2}$ si $-1<x\leqslant 1$; $y'=\frac{1}{2}$ si $|x|>1$. 983. $y'=2xe^{-x^2}(1-x^2)$ si $|x|\leqslant 1$; $y'=0$ si $|x|>1$. 984. a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq\pm 3)$;

c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$; d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. 985. a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$; b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$;

c) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$; d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$. 986. a) $2xf'(x^2)$; b) $\sin 2x\,[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; c) $e^{f(x)}[e^xf'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$; d) $f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'\{f[f(x)]\}$. 986.1. 1 000! 988. $3x^2-15$. 989. $6x^2$. 992. a) $n>0$; b) $n>1$; c) $n>2$. 993. a) $n\geqslant m+1$; b) $1<n<m+1$. 994. $\varphi(a)$. 995. $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi(a)$.

999. a) No es derivable en $x=1$; b) no es derivable en $x=\frac{2k-1}{2}\pi$, k es entero; c) es derivable en todos los puntos; d) no es derivable en $x=k\pi$, k es entero; e) no es derivable en $x=-1$. **1000.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\operatorname{sgn} x$ si $x\neq 0$ y $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1001.** $f'_-(x)=f'_+(x)=$ $=\pi[x]\cos\pi x$ si $x\neq$ un número entero; $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$, $f'_+(k)=$ $=\pi k(-1)^k$ si k es entero. **1002.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\cdot$ $\cdot\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$ si $x\neq\frac{2}{2k+1}$ (k es entero); $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=$ $=-(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. 1003. $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ si $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; $f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty$. $f'_\pm(\sqrt{2k\pi})=\pm\infty$ $(k=1,2,\ldots)$. 1004. $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$ si $x\neq 0$; $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. 1005. $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ si $x\neq 0$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. 1006. $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\frac{\varepsilon}{x}$, donde $\varepsilon=-1$ si $0<|x|<1$ y $\varepsilon=1$ si $1<|x|<+\infty$; $f'_-(\mp 1)=-1$, $f'_+(\mp 1)=1$. 1007. $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ si $x\neq\mp 1$; $f'_-(\mp 1)=\mp 1$, $f'_+(\mp 1)=\pm 1$. 1008. $f'_-(x)=f'_+(x)=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1}$ si $x\neq 2$; $f'_\mp(2)=\mp\frac{\pi}{2}$. 1009.1. a $f'_-(0)=$ $=-\frac{1}{2}$, $f'_+(0)=\frac{1}{2}$; b) $f'_-(1)=f'_+(1)=\frac{1}{2}$; c) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. 1010. $a=2x_0$; $b=-x_0^2$. 1011. $a=f'_-(x_0)$; $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$. 1012. $A=$ $=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$ $c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. 1013. $a=\frac{3m^2}{2c}$. $b=-\frac{m^2}{2c^3}$. 1014. a) Sí; b) no. 1015. a) No; b) no. 1016. a), b), c) La función $F(x)$ puede tener derivada $F'(x)$ y puede no tenerla. 1017. $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. 1018. a) No puede; b) puede. 1919. 1) No necesariamente; 2) necesariamente. 1020. No necesariamente. 1021. No se deduce. 1022. No se deduce. 1023. En general, no se puede. 1024. $P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

1025. $S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; $T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

1025.1. $S_n=\frac{n\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sh}^2\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$ 1026. $S_n=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg} x$.

1029. 40π cm²/seg. 1030. 25 m²/seg; 0,4 m/seg. 1031. 50 km/h.

1032. $S(x)=\frac{x^2}{2}$, si $0\leqslant x\leqslant 2$; $S(x)=x^2-2x+2$, si $x>2$; $S'(x)=x$, si $0\leqslant x\leqslant 2$; $S'(x)=2x-2$, si $x>2$. 1033. $S(x)=$ $=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}$; $S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn} x$ $(0<|x|\leqslant a)$.

1034. $y'_x=\frac{1}{3(y^2+1)}$. 1035. $y'_x=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. 1036. a) $-\infty<y<+\infty$; $x'_y=\frac{x}{x+1}$; b) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\frac{1}{1-x+y}$; c) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; d) $-1<y<1$, $x'_y=\frac{1}{1-y^2}$. 1037. a) $x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; $x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; $x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x'_i=\frac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i=1,2,3,4)$. b) $x_1=-\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$; $x_2=\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$; $x'_i=\frac{x^3}{2y^2}$ $(i=1,2)$; c) $x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y})$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x_2=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$

$(0<y\leqslant 1)$; $x'_i=-\dfrac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$ $(i=1,2)$. 1038. $y'_x=-\dfrac{3}{2}(1+t)$; -3; $-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{9}{2}$; $(-4, 4)$. 1039. $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ $(t>0,\ t\neq 1)$. 1040. $y'_x=-1$ $(0<x<1)$. 1041. $y'_x=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$ $(0<|t|<\pi)$. 1042. $y'_x=\dfrac{b}{a}\operatorname{cth} t$ $(t>0)$. 1043. $y'_x=-\operatorname{tg} t\left(t\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k \text{ es entero}\right)$. 1044. $y'_x=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$ $(t\neq 2k\pi,\ k$ es entero). 1045. $y'_x=\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(t\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1046. $y'_x=\operatorname{sgn} t$ $(0<t<+\infty)$. 1048. $y'=\dfrac{1-x-y}{x-y}$; $\dfrac{5}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$. 1049. $\dfrac{p}{y}$. 1050. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. 1051. $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 1052. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. 1053. $\dfrac{x+y}{x-y}$. 1054. a) $\operatorname{tg}(\varphi+\operatorname{arctg}\varphi)$. b) $-\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq 0,\ \varphi\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{m}\right)$. 1055. a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$; $y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; b) $y=3$, $x=2$; c) $x=3$, $y=0$. 1056. a) $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\dfrac{1}{4}\right)$; b) $(0, 2)$. 1058. $|x|<\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{2\pi}{3}<|x|\leqslant\pi$. 1059. $\max|y'_1-y'|=10\pi\approx 31{,}4$. 1060. $\dfrac{\pi}{4}$. 1061. $\dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\approx \operatorname{arc} 37°$. 1062. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\approx\operatorname{arc} 70°30'$. 1063. $n>57{,}3$. 1064. a) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{|a|}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$. 1066. $\left|\dfrac{x}{n}\right|$. 1069. $\dfrac{y_0^2}{|a|}$. 1071. $b^2-4ac=0$. 1072. $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2=0$. 1073. $a=\dfrac{1}{2e}$. 1077. a) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; b) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$. 1078. a) $y=x$, $y=-x$; b) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$; c) $y=-x$, $y=x$. 1079. $y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\dfrac{t_0}{2}$. La tangente a la cicloide es perpendicular al segmento que une el punto de contacto con el punto de adherencia del círculo que rueda.
1081. $3x+5y-50=0$, $5x-3y-10{,}8=0$. 1082. $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. 1083. $\Delta f(1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $df(1)=\Delta x$. a) 5, 1; b) 0,131, 0,1; c) 0,010301, 0,01. 1084. $\Delta x=20\,\Delta t+5(\Delta t)^2$, $dx=20\,\Delta t$; a) 25 m, 20 m; b) 2,05 m, 2 m; c) 0,020005 m, 0,02 m. 1085. $-\dfrac{dx}{x^2}$ $(x\neq 0)$. 1086 $\dfrac{dx}{a^2+x^2}$. 1087. $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$ $(|x|\neq|a|)$. 1088. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. 1089. $\dfrac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $(|x|<|a|)$ 1090. a) $(1+x)e^x\,dx$; b) $x\sin x\,dx$; c) $-\dfrac{3dx}{x^4}$ $(x\neq 0)$; d) $\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$ $(x>0)$; e) $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; f) $\dfrac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<1)$; g) $-\dfrac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$; h) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; i) $\dfrac{dx}{\cos^2 x}\left(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \text{ es entero}\right)$.

1091. $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$ 1092. $\dfrac{v\,du-2u\,dv}{v^3}$ $(v\neq 0)$. 1093. $-\dfrac{u\,du+v\,dv}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ $(u^2+v^2>0)$ 1094 $\dfrac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. 1095. $\dfrac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. 1096. a) $1-4x^3-3x^8$; b) $\dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x-\dfrac{\sin x}{x}\right)$; c) $-\operatorname{ctg} x$ $(x\neq k\pi,\ k$ es entero); d) $-\operatorname{tg}^2 x\left(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \text{ es entero}\right)$; e) -1 $(|x|<1)$. 1097. a) Aumentará
104,7 cm²; b) disminuirá 43,6 cm². 1098. Hay que alargarlo 2,23 cm.
1099. 1,007 (por las tablas: 1,0066). 1100. 0,4849 (por las tablas: 0,4848).
1101. −0,8747 (por las tablas: −0,8746). 1102. 0,8104 = arc 46°26′ (por
las tablas: arc 46°24″). 1103. 1,043 (por las tablas: 1,041). 1104. a) 2,25
(por las tablas: 2,24); b) 5,833 (por las tablas: 5,831); c) 10,9546 (por las ta-
blas: 10,9545). 1105. a) 2,083 (por las tablas: 2,080); b) 2,9907 (por las ta-
blas: 2,9907); c) 1,938 (por las tablas: 1,931); d) 1,9954 (por las tablas:
1,9953). 1106. 0,24 m²; 4,2 %. 1107. $\delta_R\leqslant 0{,}33\,\%$.
1108. a) $\delta_g=\delta_l$; b) $\delta_g=2\delta_T$. 1109. 0,43 δ 1111. $\dfrac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 1112. $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$ $(|x|<1)$. 1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 1114. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\pm 1,\ldots\right)$. 1115. $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$. 1116 $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$ $(|x|<1)$. 1117. $\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$. 1118. $\dfrac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$. 1119. $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$ $(x>0)$. 1120. $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$. 1121. $2(uu''+u'^2)$. 1122. $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$ $(uv>0)$. 1123. $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ $(u^2+v^2>0)$. 1124. $y''=u^v\left[\left(v\dfrac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+v\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}+\dfrac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right]$.
1125. $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$; $y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$. 1126. $y''=\dfrac{1}{x^4}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $y'''=-\dfrac{1}{x^6}f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^5}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
1127. $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$; $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$.
1128. $y''=\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$; $y'''=\dfrac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$.
1129. $y''=\varphi'^2(x)f''(\varphi(x))+\varphi''(x)f'(\varphi(x))$; $y'''=\varphi'^3(x)f'''(\varphi(x))+3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'''(x)f'(\varphi(x))$. 1130. a) $e^x\,dx^2$; b) $e^x(dx^2+d^2x)$.
1131. $\dfrac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$ 1132. $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$ $(x>0)$. 1133. $x^x\left[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}\right]dx^2$.
1134. $u\,d^2v+2du\,dv+v\,d^2u$ 1135. $\dfrac{(v\,d^2u-u\,d^2v)-2dv(v\,du-u\,dv)}{v^3}$ $(v>0)$.
1136. $u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2+2mnuv\,du\,dv+n(n-1)u^2dv^2]+uv(mv\,d^2u+nu\,d^2v)\}$. 1137. $a^u\ln a\,(du^2\ln a+d^2u)$.
1138. $[(v^2-u^2)du^2-4uv\,du\,dv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v)]\times(u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. 1139. $[-2uv\,du^2+2(u^2-v^2)du\,dv+2uv\,dv^2+(u^2+v^2)(v\,d^2u-u\,d^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$.

1140. $y''=\frac{3}{4(1-t)}$; $y'''=\frac{3}{8(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$.

1141. $y''=-\frac{1}{a\sin^3 t}$; $y'''=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$ $(t\neq k\pi$, k es entero).

1142. $y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y'''=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$ $(t\neq 2k\pi$, k es entero).

1143. $y''=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$; $y'''=\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\right.$ $k=0, \pm 1, \ldots)$. 1144. $y''=\frac{1}{f''(t)}$; $y'''=-\frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ $(f''(t)\neq 0)$. 1145. $x'=\frac{1}{y'}$; $x''=-\frac{y''}{y'^3}$, $x'''=\frac{y'y'''-3y''^2}{y'^5}$; $x^{IV}=-\frac{y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3}{y'^7}$ $(y'\neq 0)$.

1146. $-\frac{x}{y}$, $-\frac{25}{y^3}$, $-\frac{75x}{y^5}$; $-\frac{3}{4}$, $-\frac{25}{64}$, $-\frac{225}{1024}$. 1147. $\frac{p}{y}$, $-\frac{p^2}{y^3}$, $\frac{3p^3}{y^5}$.

1148. $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$, $y''=\frac{6}{(x-2y)^3}$, $y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}$. 1149. $y'=\frac{2x^2y}{1+y^2}$; $y''=\frac{2x^2y}{(1-y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$. 1150. $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

1151. $a=\frac{1}{2}f''(x_0)$; $b=f'(x_0)$; $c=f(x_0)$. 1152. $20-10t$, -10; 0, -10.

1153. $v=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$, $j=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. 1154. $x=v_0t\cos\alpha$, $y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$; $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$; $j=g$; $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. 1155. $x^2+y^2=25$; $5|\omega|$, $5\omega^2$. 1156. $y^{(6)}=4\cdot 6!$; $y^{(7)}=0$.

1157. $y^{(n)}=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$ $(x\neq 0)$. 1158. $y^{(10)}=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$, donde $n!!$ denota el producto de los números naturales que no son superiores a n y tienen la misma paridad que éste, o sea, $17!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots 17$.

1159. $y^{(5)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$.

1160. $y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$. 1161. $y^{(20)}=2^{20}e^{2x}\times$ $\times(x^2+20x+95)$. 1162. $y^{(10)}=e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, donde $A_{10}^i=10\cdot 9\cdot\ldots(11-i)$ y $A_{10}^0=1$. 1163. $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$ $(x>0)$. 1164. $y^{(5)}=\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$ $(x>0)$.

1165. $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)$. 1166. $y'''=$

$=\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x-\frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$ $\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$. 1167. $y^{(10)}=$ $=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$. 1168. $y^{(100)}=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

1169. $y^{IV}=-4e^x\cos x$. 1170. $y^{(6)}=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x+$ $+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$. 1171. $120\,dx^5$. 1172. $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$ $(x>0)$. 1173. $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)\,dx^{10}$. 1174. $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\right.$ $\left.+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$. 1175. $8\sin x\operatorname{sh}x\,dx^6$. 1176. $2u\,d^{10}u+20\,du\,d^9u+90\,d^2u\,d^8u+$ $+240d^3u\,d^7u+420d^4u\,d^6u+252(d^5u)^2$. 1177. $e^u(du^4+6du^2\,d^2u+4du\,d^3u+$ $+3d^2u^2+d^4u)$. 1178. $\frac{2du^3}{u^3}-\frac{3du\,d^2u}{u^2}+\frac{d^3u}{u}$. 1179. $d^2y=y''\,dx^2+y'\,d^2x$; $d^3y=y'''\,dx^3+3y''\,dx\,d^2x+y'\,d^3x$; $d^4y=y^{IV}\,dx^4+6y'''\,dx^2\,d^2x+4y''\,dx\,d^3x+$ $+3y''\,d^2x^2+y'\,d^4x$. 1180. $y''=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3}$; $y'''=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}$.

1187. $P^{(n)}(x)=a_0n!$ 1188. $\frac{(-1)^{n-1}n!\,c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. 1189. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\right.$ $\left.+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$. 1190. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. 1191. $\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(1-2x)^{n+1/2}}$ $\left(x<\frac{1}{2}\right)$. 1192. $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+1/3}}$ $(n\geqslant 2;$ $x\neq -1)$.

1193. $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1194. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1195. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-$ $-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1196. $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1197. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1198. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1199. $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1200. $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(2a+b)^n}{4}\times$ $\times\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. 1201. $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1202. $a^nx\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+$ $+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1203. $a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\times$ $\times\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. 1204. $(-1)^ne^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)]$.

1205. $e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$.

1206. $e^x 2^{n/2} \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$ **1207.** $e^x 2^{n/2} \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

1208. $\frac{(n-1)!\, b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n\right]$ $\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$.

1209. $e^{ax}\left[a^nP(x)+C_n^1 a^{n-1}P'(x)+\ldots+P^{(n)}(x)\right]$. **1210.** $\frac{1}{2}\{[(x+n)-$ $-(-1)^n(x-n)]\,\mathrm{ch}\,x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\,\mathrm{sh}\,x\}$.

1211. $d^ny=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+n!\right]dx^n$.

1212. $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left\{\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right\}dx^n$ $(x>0)$. **1214.** a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\times\right.$ $\times\,\mathrm{ch}\,ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sh}\,ax\sin\left.\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$; b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\times$ $\times\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{ch}\,ax\sin\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sh}\,ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$,

donde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1215.** $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}\times$ $\times(p-k)^n C_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1216.** a) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\times$ $\times\sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; b) $\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\right.$ $\left.+\frac{n\pi}{2}\right]$; c) $\sum_{k=0}^{p}\left\{\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\cos\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$.

1218. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\,\mathrm{arcctg}\,x)$ $(x\neq 0)$. **1219.** a) $\frac{n!}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$; b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$ $(n>1)$. **1220.** a) $n(n-1)a^{n-2}$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k-1)}(0)=$ $=(-1)^k(2k!)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; c) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=$ $=[1\cdot3\ldots(2k-1)]^2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. **1221.** a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\ldots$ $\ldots[m^2-(2k-2)^2]$, $f^{(2k-1)}(0)=0$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f'(0)=m$, $f^{(2k-1)}(0)=$ $=(-1)^k m(m^2-1^2)\ldots[m^2-(2k-1)^2]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. **1222.** a) $f^{(2k)}(0)=$ $=(-1)^{k-1}\cdot2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)$, $f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$; b) $f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$, $f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. **1223.** $n!\,\varphi(a)$.

1228. $L_m(x)=(-1)^m\left[x^m-m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\cdot2}x^{m-2}+\ldots+(-1)^m m!\right]$.

1231. $H_m(x)=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\ldots$

1236. Para $x=0$ no existe derivada finita $f'(x)$. **1244.** $A(-1,-1)$, $C(1,1)$. **1245.** No es válida. **1246.** a) $\theta=\frac{1}{2}$;

b) $\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}$ $(x\geqslant0,\ \Delta x>0)$; c) $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$ $(x(x+\Delta x)>0)$; d) $\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. **1248.** $c=\frac{1}{2}$ ó $\sqrt{2}$.

1250. En general, no. **1261.** $f(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}$, donde c_i $(i=0,1,\ldots,n-1)$ son constantes. **1268.** Para $-\infty<x<\frac{1}{2}$ la función es creciente; para $\frac{1}{2}<x<+\infty$ es decreciente. **1269.** Para $-\infty<x<-1$ la función es decreciente; para $-1<x<1$ es creciente; para $1<x<+\infty$ es decreciente. **1270.** Para $-\infty<x<-1$ la función es decreciente; para $-1<x<1$ la función es creciente; para $1<x<+\infty$ es decreciente. **1271.** Para $0<x<100$ la función es creciente; para $100<x<+\infty$ es decreciente.

1272. La función es creciente. **1273.** En los intervalos $\left(\frac{k\pi}{2},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ la función es creciente; en los intervalos $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ es decreciente $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **1274.** En los intervalos $\left(\frac{1}{2k+1},\ \frac{1}{2k}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2k+1},\ -\frac{1}{2k+2}\right)$ la función es creciente; en los intervalos $\left(\frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{2k+1}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2k},\ -\frac{1}{2k+1}\right)$ es decreciente $(k=0,1,2,\ldots)$. **1275.** Para $-\infty<x<0$ la función es decreciente; para $0<x<\frac{2}{\ln2}$ es creciente; para $\frac{2}{\ln2}<x<+\infty$ es decreciente. **1276.** Para $0<x<n$ la función es creciente: para $n<x<\infty$ es decreciente. **1277.** Es decreciente para $-\infty<x<-1$ y $0<x<1$; es creciente para $-1<x<0$ y $1<x<+\infty$. **1278.** La función es creciente en los intervalos $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi},\ e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}\right)$; es decreciente en los intervalos $\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi},\ e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **1283.** No. **1298.** En el punto A la concavidad de la curva es hacia arriba; en el punto B la concavidad es hacia abajo; C es un punto de inflexión. **1299.** La gráfica para $-\infty<x<1$ tiene la concavidad hacia arriba; para $1<x<+\infty$ la concavidad es hacia abajo; $x=1$ es un punto de inflexión. **1300.** Para $|x|<\frac{a}{\sqrt{3}}$ la concavidad

es hacia abajo; para $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ la concavidad es hacia arriba; $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ es un punto de inflexión. **1301.** Para $x<0$ la concavidad es hacia abajo; para $x>0$ la concavidad es hacia arriba; $x=0$ es un punto de inflexión. **1302.** La concavidad es hacia arriba. **1303.** Para $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ la la concavidad es hacia abajo; para $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ la concavidad es hacia arriba; $x=k\pi$ son puntos de inflexión ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1304.** Para $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ la concavidad es hacia abajo; para $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ la concavidad es hacia arriba; $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ son puntos de inflexión. **1305.** Para $|x|<1$ la concavidad es hacia arriba; para $|x|>1$ la concavidad es hacia abajo; $x=\pm 1$ son puntos de inflexión. **1306.** Para $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ la la concavidad es hacia arriba; para $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ la concavidad es hacia abajo; $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ son puntos de inflexión ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1307.** La concavidad es hacia arriba para $0<x<+\infty$. **1309.** $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** La concavidad es hacia abajo (para $a>0$).

1318. $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** -2. **1322.** $\frac{1}{3}$. 1323. $-\frac{1}{3}$. 1324. $\frac{1}{3}$. 1325 $\frac{1}{6}$ 1326 $\frac{1}{2}$. 1327. 1. 1328. $\frac{a-b}{3ab}$ 1329. $\frac{1}{6}\ln a$. 1330. -2. 1331. 1. 1332. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 1333. $\frac{1}{6}$. 1334. $\frac{2}{3}$. 1335. 1. 1336. 0. 1337. 0. 1338. 0. 1339. 0. 1340. 0. 1341. 0. 1342. 1. 1343. 1. 1344. -1. 1345. e^k. 1346. e^{-1}. 1347. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 1348. e^{-1}. 1349. 1. 1350. 1. 1351. 1. 1352. $e^{\frac{2}{\sin 2a}}\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, \ k \text{ es entero}\right)$. 1353. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$. 1354. $\frac{1}{2}$. 1355. $\frac{1}{2}$. 1356. 0. 1357. $-\frac{1}{2}$. 1358. $a^a(\ln a - 1)$. 1359. $-\frac{e}{2}$. 1360. $\frac{1}{a}$. 1361. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 1362. 1. 1363. $e^{\frac{1}{6}}$. 1363.1. $e^{-\frac{1}{6}}$. 1363.2. $e^{\frac{1}{3}}$. 1363.3. $e^{-\frac{1}{3}}$. 1363.4. $e^{-\frac{1}{6}}$. 1364. $e^{-\frac{1}{2}}$. 1365. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 1366. e^{-1}. 1367. $\frac{mn}{n-m}$. 1368. $\sqrt{e}$. 1368.1. 0. 1369. $-\frac{1}{6}$. 1370. a. 1371. $\operatorname{tg}\alpha$. 1373.1. $f'(0)=-\frac{1}{12}$. **1373.2.** $y=\frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ **1374.** La regla de L'Hospital no es aplicable, el límite es igual a cero; b) la regla de L'Hospital no es aplicable, el límite es igual a 1;

c) aplicando formalmente la regla de L'Hospital se obtiene un resultado falso, igual a 0, el límite no existe; d) la aplicación de la regla de L'Hospital es ilícita e implica un resultado falso, igual a cero; no existe límite. **1375.** $\frac{4}{3}$. 1376. $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$. 1377. $1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$; -48. 1378. $1+60x+1950x^2+o(x^2)$. 1379. $a+\frac{x}{ma^{m-1}}-\frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}}+o(x^2)$. 1380. $\frac{1}{6}x^3+x^3+o(x^3)$. 1381 $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$ 1382. $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$. 1383. $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{13})$. 1384. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$. 1385. $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. 1386. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$. 1387. $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$. 1388. $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. 1389. $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. 1390. $y=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$. 1391. $\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. 1392. $\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$.

1394. a) Es menor que $\frac{3}{(n+1)!}$; b) no es superior a $\frac{1}{3840}$; c) es menor que $2\cdot 10^{-6}$; d) es menor que $\frac{1}{16}$. **1395.** $|x|<0{,}222=\text{arc } 12^\circ 30'$.

1396. a) 3,1072; b) 3,0171; c) 1,9961; d) 1,64872; e) 0,309017; f) 0,182321; g) $0{,}67474=\text{arc } 38^\circ 39' 35''$; h) $0{,}46676=\text{arc } 26^\circ 44' 37''$; i) 1,12117. 1397. a) 2,718281828; b) 0,01745241; c) 0,98769; d) 2,2361; e) 1,04139. 1398. $-\frac{1}{12}$. 1399. $\frac{1}{3}$. 1400. $-\frac{1}{4}$. 1401. $\frac{1}{3}$. 1402. $\frac{1}{6}$. 1403. $\ln^2 a$. 1404. $\frac{1}{2}$. 1405. 0. 1406. $\frac{1}{3}$. 1406.1. $\frac{19}{90}$. 1406.2. $\frac{1}{2}$. 1406.3. $\frac{1}{2}$. 1407. $\frac{x^7}{30}$. 1408. x^2. 1409. $\frac{x}{2}$. 1410. $a=\frac{4}{3}$; $b=-\frac{1}{3}$. 1410.1. $A=-\frac{2}{5}$; $B=-\frac{1}{15}$. 1410.2. $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{12}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{12}$. 1411. a) $\frac{2x}{R^2}$; b) $\frac{4}{3}x$. c) $\frac{An}{100}$; d) $\frac{70}{x}$. 1412. $\alpha=\frac{2}{3}$; $\beta=\frac{1}{3}$. 1413. $\frac{\alpha^3}{180}$, donde α es la mitad del ángulo central del arco. **1414.** Máximo $y=2\frac{1}{4}$ para $x=\frac{1}{2}$. **1415.** No hay extremo. **1416.** Mínimo $y=0$ para $x=1$. **1417.** Mínimo $y=0$ para $x=0$, si m es par, y no hay extremo para $x=0$, si m es impar; máximo $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ para $x=\frac{m}{m+n}$; mínimo $y=0$ para $x=1$, si n es par, y no hay extremo para $x=1$, si n es impar. **1418.** Mínimo $y=2$ para $x=0$. **1419.** Mínimo $y=0$ para $x=-1$; máximo $y=10^{10}e^{-9}\approx 1.234.000$ para $x=9$. **1420.**

Máximo $y = 1$ para $x = 0$, si n es impar, y no hay extremo para $x = 0$, si n es par. **1421**. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$. **1422**. Máximo $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\approx 0{,}529$ para $x=\frac{1}{3}$; mínimo $y = 0$ para $x = 1$; no hay extremo para $x = 0$. **1423**. Mínimo $f(x_0) = 0$, si $\varphi(x_0) > 0$ y n es par, máximo $f(x_0) = 0$, si $\varphi(x_0) < 0$ y n es par; $f(x_0)$ no es extremo si n es impar. **1425**. No. **1427**. a) mínimo $f(0) = 0$; b) mínimo $f(0) = 0$. **1428**. Mínimo $f(0) = 0$. **1429**. Para $x = 1$ máximo $y = 0$; para $x = 3$ mínimo $y = -4$. **1430**. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$; máximo $y = 1$ para $x = \pm 1$. **1431**. Para $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0{,}23$ mínimo $y \approx -0{,}76$; para $x = 1$ máximo $y = 0$; para $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1{,}43$ mínimo $y \approx -0{,}05$; para $x = 2$ no hay extremo. **1432**. Para $x = -1$ máximo $y = -2$; para $x = 1$ mínimo $y = 2$. **1433**. Para $x = -1$ mínimo $y = -1$; para $x = 1$ máximo $y = 1$. **1434**. Para $x=\frac{7}{5}$ mínimo $y=-\frac{1}{24}$. **1435**. Para $x = 0$ y $x = 2$ mínimo en la frontera $y = 0$; para $x = 1$ máximo $y = 1$. **1436**. Para $x=\frac{3}{4}$ mínimo $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx -0{,}46$; para $x = 1$ no hay extremo. **1437**. Para $x = 1$ máximo $y = e^{-1} \approx 0{,}368$. **1438**. Para $x = +0$ máximo en la frontera $y = 0$; para $x = e^{-2} \approx 0{,}135$ mínimo $y=-\frac{2}{e}\approx -0{,}736$. **1439**. Para $x = 1$ mínimo $y = 0$; para $x = e^2 \approx 7{,}389$ máximo $y=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}541$. **1440**. Para $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ máximo $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; para $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mínimo $y=-\frac{3}{4}$. **1441**. Para $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ máximo $y = 10$; para $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mínimo $y = 5$. **1442**. Para $x = 1$ máximo $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}439$. **1443**. Para $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mínimo $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; para $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ máximo $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

1444. Para $x = -1$ máximo $y = e^{-2} \approx 0{,}135$; para $x = 0$ mínimo $y = 0$ (punto anguloso); para $x = 1$ máximo $y = 1$, (punto anguloso).

1445. $\frac{1}{2}$; 32. 1446. 2; 66. 1447. 0; 132. 1448. 2; 100,01. 1449. 1; 3. 1450. 0; $\frac{100}{e}\approx 36{,}8$. 1451. 0; 1. 1452. 0; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1{,}2$. 1453. $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0{,}067$; 1.

1454. $m(x)=-\frac{1}{6}$, si $-\infty<x\leqslant -3$; $m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, si $-3<x\leqslant -1$; $m(x)=0$, si $-1<x<+\infty$; $M(x)=\frac{1}{2}$, si $-\infty<x\leqslant 1$; $M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, si $1<x<+\infty$. 1455. a) $\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1{,}77\cdot 10^7$; b) $\frac{1}{200}$; c) $\sqrt[4]{3}\approx 1{,}44$. 1457. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4{,}85$. 1458. $q=-\frac{1}{2}$. 1459. $\frac{4}{27}$. 1460. $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)$; $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$. 1461. $\frac{2}{3}$. **1462**. Una raíz: $(3, +\infty)$. **1463**. Una raíz: $-\infty < x_1 < -1$, si $h > 27$; tres raíces: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 3$ y $3 < x_3 < +\infty$ si $-5 < h < 27$; una raíz: $3 < x_3 < +\infty$, si $h < -5$. **1464**. Dos raíces: $-\infty < x_1 < -1$ y $1 < x_2 < +\infty$. **1465**. Una raíz: $-\infty < x_1 < -1$, si $-\infty < a < -4$; tres raíces: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < +\infty$, si $-4 < a < 4$; una raíz: $1 < x_1 < +\infty$, si $4 < a < +\infty$. **1466**. Una raíz: $0 < x_1 < 1$, si $-\infty < k < 0$; dos raíces: $0 < x_1 < \frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k} < x_2 < +\infty$, si $0 < k < \frac{1}{e}$; no hay raíces, si $k > \frac{1}{e}$.

1467. No hay raíces, si $a < 0$; una raíz: $-\infty < x_1 < 0$, si $0 < a < \frac{e^2}{4}$; tres raíces: $-\infty < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ y $2 < x_3 < +\infty$, si $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$.

1468. Dos raíces, si $|a| < 3\sqrt{3}/16$; no hay raíces, si $|a| > 3\sqrt{3}/16$. **1469**. Dos raíces: $0 < |x_1| < \xi$ y $\xi < |x_2| < +\infty$, donde $\xi \approx 1{,}2$ es una raíz positiva de la ecuación: $\operatorname{cth} x = x$, si $|k| > \operatorname{sh}\xi \approx 1{,}50$; no hay raíces, si $|k| < \operatorname{sh}\xi$. **1470**. a) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$; b) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. **1471***) Simetría respecto del origen de coordenadas. Los ceros de la función son: $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$. Mínimo $y = -2$ para $x = -1$; máximo $y = 2$ para $x = 1$. Punto de inflexión $x = 0$, $y = 0$. **1472**. Simetría respecto del eje Oy. Los ceros son: $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}65$. Mínimo $y = 1$ para $x = 0$; máximo $y = 1\frac{1}{2}$ para $x = \pm 1$. Puntos de inflexión: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm 0{,}58$; $y=1\frac{5}{18}$. **1473**. Simetría respecto del punto $A(1, 2)$. Ceros: $x = -1$ y $x = 2$. Mínimo $y = 0$ para $x = 2$; máximo $y = 4$ para $x = 0$. Punto de inflexión $x = 1$, $y = 2$. **1474**. Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función $x = \pm\sqrt{2} \approx 1{,}41$. Máximo $y = 2$ para $x = 0$; mínimo $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}12$ para $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx \pm 2{,}06$. Puntos de inflexión: $x_{1,2}=\pm 0{,}77$, $y_{1,2}=1{,}04$; $x_{3,4}\approx\pm 2{,}67$, $y_{3,4}\approx -0{,}010$. Asíntota $y = 0$.

*) A los problemas de construcción de gráficas no siempre se dan respuestas completas.

1475. Puntos de discontinuidad: $x = 2$ y $x = 3$. Ceros: $x = \pm 1$. Mínimo $y = -(10 - \sqrt{96}) \approx -0{,}20$ para $x = \frac{7 - \sqrt{24}}{5} \approx 0{,}42$; máximo $y = -(10 + \sqrt{96}) \approx -19{,}80$ para $x = \frac{7 + \sqrt{24}}{5} \approx 2{,}38$. Punto de inflexión $x \approx -0{,}58$, $y \approx -0{,}07$. Asíntotas: $x = 2$, $x = 3$ e $y = 1$. **1476.** Puntos de discontinuidad: $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Cero de la función $x = 0$. No hay puntos de extremo. Punto de inflexión $x \approx -0{,}22$, $y \approx -0{,}19$. Asíntotas: $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$. **1477.** Cero de la función $x = 0$. Punto de discontinuidad $x = -1$. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$; máximo $y = -9\frac{13}{27}$ para $x = -4$. No hay puntos de inflexión. Asíntotas: $x = -1$ e $y = x - 3$. **1478.** Mínimo $y = 0$ para $x = -1$. Punto de inflexión $x = -4$, $y = \frac{81}{625}$. Asíntotas: $x = 1$ e $y = 1$. **1479.** Máximos $y = -\frac{34\sqrt{17} + 142}{32} \approx -8{,}82$ para $x = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx -3{,}56$ e $y = 0$ para $x = 0$; mínimo $y = \frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0{,}06$ para $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0{,}56$. Punto de inflexión $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{45}$. Asíntotas: $x = -1$ e $y = x - 3$. **1480.** Simetría respecto del origen de coordenadas. No hay puntos de extremo; punto de inflexión $x = 0$, $y = 0$. Asíntotas: $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$. **1481.** Mínimo $y = 13\frac{1}{2}$ para $x = 5$. Punto de inflexión $x = -1$, $y = 0$. Asíntotas: $x = 1$ e $y = x + 5$. **1482.** Mínimo $y = 2\frac{2}{3}$ para $x = 2$; máximo $y \approx -3{,}2$ para $x \approx -2{,}4$; punto de inflexión $x = 0$, $y = 8$. Asíntotas: $x = -1$ e $y = x$. **1483.** Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función: $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0{,}79$. No hay puntos de extremo. Puntos de inflexión: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0{,}71$, $y = -2\frac{2}{3}$. Asíntotas: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. **1484.** Campo de existencia: $0 \leqslant x < +\infty$. Ceros: $x = 0$ y $x = 3$. Mínimo $y = -2$ para $x = 1$; máximo en la frontera $y = 0$ para $x = 0$. Concavidad hacia arriba. **1485.** Campo de existencia: $|x| \leqslant 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Simetría respecto del origen de coordenadas y de los ejes coordenados. Ceros: $x = 0$ y $x = \pm 2\sqrt{2}$. Máximo $|y| = 4$ para $x = \pm 2$, mínimo $|y| = 0$ para $x = 0$; mínimo de la frontera $|y| = 0$ para $x = \pm 2\sqrt{2}$. No hay puntos de inflexión. **1485.1.** Cero de la función $x = 2$. Mínimo $y = -\sqrt{5} \approx -2{,}24$ para $x = -0{,}5$. Puntos de inflexión $x_1 = -\frac{3 + \sqrt{41}}{8} \approx -1{,}18$; $y_1 \approx -2{,}06$ y $x_2 = \frac{\sqrt{41} - 3}{8} \approx 0{,}42$;

$y_2 \approx -1{,}46$. Asíntotas: $y = -1$ para $x \to -\infty$ e $y = 1$ para $x \to +\infty$. **1486.** Campo de existencia: $1 \leqslant x \leqslant 2$ y $3 \leqslant x < +\infty$. Ceros: $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. Máximo $y = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12} \approx 0{,}62$ para $x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1{,}42$; mínimos en la frontera $|y| = 0$ para $x = 1$, 2 y 3. **1487.** Mínimo $y = 0$ para $x = 1$; máximo $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1{,}06$ para $x = -\frac{1}{3}$; punto de inflexión $x = -1$, $y = 0$. Asíntota $y = x - \frac{1}{3}$. **1488.** Simetría respecto del eje Oy. Mínimo $y = -1$ para $x = 0$. Concavidad hacia abajo. Asíntota $y = 0$. **1489.** Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero de la función: $x = 0$. Mínimo $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2{,}52$ para $x = -2$; máximo $y = \sqrt[3]{16}$ para $x = 2$. Punto de inflexión: $x = 0$, $y = 0$. Asíntota: $y = 0$. **1490.** Simetría respecto del eje Oy. Mínimo $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$ para $x = \pm 1$; máximo $y = 2$ para $x = 0$. Concavidad hacia abajo. **1491.** Simetría respecto del origen de coordenadas. Puntos de discontinuidad: $x = \pm 1$. Cero de la función: $x = 0$. Mínimo $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}38$ para $x = \sqrt{3}$; máximo $y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ para $x = -\sqrt{3}$. Puntos de inflexión: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ y $x_{2,3} = \pm 3$, $y_{2,3} = \pm 1\frac{1}{2}$. **1492.** Campo de existencia de la función: $|x| \geqslant 1$. Simetría respecto del eje Oy. Mínimo en la frontera $y = 0$ para $x = \pm 1$. Concavidad hacia abajo. Asíntotas: $y = \frac{x}{2}$ para $x \to +\infty$ e $y = -\frac{x}{2}$ para $x \to -\infty$. **1493.** Campo de existencia de la función: $x > 0$. Mínimo $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$ para $x = \frac{1}{2}$. Concavidad hacia arriba. Asíntotas $y = x + \frac{3}{2}$ y $x = 0$. **1494.** Campo de existencia: $x \geqslant 0$ y $x < -3$. Cero de la función $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4{,}30$. Mínimo $y = 13$ para $x = -4$; máximo en la frontera $y = 1$ para $x = 0$. Concavidad hacia arriba. Asíntotas: $y = \frac{5}{2} - 2x$ para $x \to -\infty$; $y = -\frac{1}{2}$ para $x \to +\infty$; $x = -3$ para $x \to -3 - 0$. **1495.** Mínimo $y = 0$ para $x = 0$; máximo $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$ para $x = -2$. Puntos de inflexión: $x_1 = -(2 - \sqrt{3}) \approx -0{,}27$, $y_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27} - 5}{2}} \approx 0{,}46$; $x_2 = -(2 + \sqrt{3}) \approx -3{,}73$, $y_2 = -\sqrt[3]{\frac{5 + \sqrt{27}}{2}} \approx -1{,}72$. Asíntota $x = -1$.

1496. Simetría respecto del eje Oy. La función es positiva. Máximo $y=\sqrt{3}\approx 1,73$ para $x=0$, mínimo $y=\sqrt{2}\approx 1,41$ para $x=\pm 1$. Puntos de inflexión $x_{1,2}\approx \pm 0,47$; $y_{1,2}\approx 1,14$ y $x_{3,4}\approx\pm 4,58$, $y_{3,4}\approx 4,55$. Asíntotas $y=\pm x$. 1497. Período de la función: $T=2\pi$; campo fundamental $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. Ceros de la función: $x_1=\pi+\arcsin\frac{\sqrt5-1}{2}\approx 1,21\pi$ y $x_2=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt5-1}{2}\approx$ $\approx 1,79\pi$. Mínimos $y=1$ para $x=\frac{\pi}{2}$ e $y=-1$ para $x=\frac{3\pi}{2}$; máximo $y=1\frac14$ para $x=\frac{\pi}{6}$ y $x=\frac{5\pi}{6}$. Puntos de inflexión: $x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0,32\pi$, $y_1=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}\approx 1,13$; $x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0,68\pi$, $y_2=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}$; $x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1,20\pi$, $y_3=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}\approx 0,055$; $x_4=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1,80\pi$, $y_4=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. 1498. Período de la función: 2π; campo fundamental $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. Simetría respecto del origen de coordenadas. Ceros: $x_1=0$ y $x_{2,3}=\pm\pi$. Mínimo $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx -7,3$ para $x=-\arccos\frac14\approx -0,42\pi$; máximo $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx 7,3$ para $x=$ $=\arccos\frac14\approx 0,42\pi$. Puntos de inflexión: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=$ $=\pm\arccos\left(-\frac78\right)\approx\pm 0,84\pi$; $y_{2,3}=\pm\frac{21}{32}\sqrt{15}\approx\pm 2,54$; $x_{4,5}=\pm\pi$, $y_{4,5}=0$.

1499. Período de la función: $T=2\pi$; campo fundamental: $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. Simetría respecto del origen de coordenadas. Ceros: $x_1=0$ y $x_{2,3}=\pm\pi$. Mínimos: $y=-\frac23\sqrt2\approx -0,94$ para $x=-\frac{3\pi}{4}$ y $x=-\frac{\pi}{4}$, $y=\frac23$ para $x=\frac{\pi}{2}$; máximos: $y=-\frac23$ para $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac23\sqrt2$ para $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{3\pi}{4}$. Puntos de inflexión: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac56}\approx\pm 0,37\pi$, $y_{2,3}=$ $=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}\approx\pm 0,81$; $x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac56}\right)\approx\pm 0,63\pi$, $y_{4,5}=\pm\frac{1}{27}\sqrt{30}$; $x_{6,7}=\pm\pi$, $y_{6,7}=0$.

1500. Período de la función: $T=2\pi$; campo fundamental $[-\pi,\pi]$. Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt3}{2}\approx\pm 0,62\pi$. Mínimos $y=\frac12$ para $x=0$; $y=-1\frac12$ para $x=\pm\pi$; máximos: $y=\frac34$ para $x=\pm\frac{\pi}{3}$. Puntos de inflexión: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0,18\pi$, $y_{1,2}\approx 0,63$; $x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0,70\pi$, $y_{3,4}\approx -0,44$

1501. Período de la función: $T=\frac{\pi}{2}$; campo fundamental $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Simetría respecto del eje Oy. La función es positiva. Máximo $y=1$ para $x=0$; mínimo $y=\frac12$ para $x=\pm\frac{\pi}{4}$ Puntos de inflexión $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$, $y_{1,2}=\frac34$.

1502. Período de la función $T=\pi$; campo fundamental $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función: $x_1=0$ y $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}$. Mínimos: $y=0$ para $x=0$ e $y=-1$ para $x=\pm\frac{\pi}{2}$; máximo $y=\frac{9}{16}$ para $x=\pm\arccos\frac14\approx\pm 0,21\pi$. Puntos de inflexión: $x_{1,2}=\pm\frac12\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx$ $\approx\pm 0,11\pi$, $y_{1,2}\approx 0,29$; $x_{3,4}=\pm\frac12\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx\pm 0,36\pi$, $y_{3,4}\approx -0,24$.

1503. Período de la función: $T=\pi$; campo fundamental: $0\leqslant x\leqslant\pi$. Punto de discontinuidad:
$x=\frac{3\pi}{4}$. Ceros: $x_1=0$, $x_2=\pi$. No hay extremos, la función es creciente. Punto de inflexión: $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\sqrt2}{2}$. Asíntota $x=\frac{3\pi}{4}$. 1504. Período de la función $T=2\pi$; campo fundamental $[-\pi,\pi]$. Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}$. Mínimo $y=1$ para $x=0$; máximo $y=-1$ para $x=\pm\pi$. Puntos de inflexión: $x_{1,2}=\frac{\pi}{2}$; $y_{1,2}=0$. Asíntotas $x=\pm\frac{\pi}{4}$ y $x=\pm\frac{3\pi}{4}$. 1504.1. Período de la función $T=2\pi$; campo fundamental $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. La función es impar. Mínimo $y=-\frac{\sqrt3}{3}\approx -0,58$ para $x=-\frac{2\pi}{3}$; máximo $y=\frac{\sqrt3}{3}\approx 0,58$ para $x=\frac{2\pi}{3}$. Puntos de inflexión $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\mp\pi$, $y_{2,3}=0$. 1505. Centros de simetría $(k\pi, 2k\pi)$. Ceros de la función: $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm 0,37$, ... Máximos $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ para $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; mínimos $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$ para $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$. Puntos de inflexión: $x=k\pi$, $y=2\pi$. Asíntotas: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ (k es entero).
1506. Simetría respecto de la recta $x=1$. La función es positiva. Máximo

$y = e$ para $x = 1$. Puntos de inflexión $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2} = \sqrt{e} \approx 1{,}65$.
Asíntota $y = 0$. 1507. Simetría respecto del eje Oy. La función es positiva.
Máximo $y = 1$ para $x = 0$. Puntos de inflexión: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}22$,
$y_{1,2} = \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}56$.
Asíntota $y = 0$. 1508. La función es positiva. Mínimo $y = 1$ para $x = 0$. Concavidad hacia arriba. Asíntota $y = x$ para $x \to +\infty$. 1509. La función no es negativa; cero $x = 0$. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$; máximo $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\, e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}39$ para $x = \frac{2}{3}$. Puntos de inflexión: $x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0{,}15$, $y_1 \approx 0{,}34$ y $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}48$, $y_2 \approx 0{,}30$. Asíntota $y = 0$ para $x \to +\infty$. 1509.1. La función no es negativa. Mínimo $y = 0$ para $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); Máximos $y = \frac{1}{2} e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Puntos de inflexión $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_k = \frac{1}{4} e^{-\left[2k+\frac{1}{3}(-1)^k\right]\pi}$. 1510. La función es positiva para $x > -1$ y es negativa para $x < -1$. Mínimo $y = 1$ para $x = 0$. Concavidad hacia arriba para $x > -1$ y hacia abajo para $x < -1$. 1511. Simetría respecto del eje Oy. La función no es negativa, cero $x = 0$. Mínimo $y = 0$ (punto anguloso) para $x = 0$. Concavidad hacia abajo. 1512. Campo de existencia de la función: $x > 0$. Cero de la función $x = 1$. Máximo $x = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$ para $x = e^2 \approx 7{,}39$. Punto de inflexión: $x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14{,}33$, $y = \frac{8}{3} e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}70$. Asíntotas: $x = 0$ cuando $x \to +0$ e $y = 0$ cuando $x \to +\infty$. 1513. Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero $x = 0$. No hay puntos de extremo, la función es creciente. Puntos de inflexión: $x = 0$, $y = 0$. 1514. Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero de la función $x = 0$. La función es creciente. Concavidad hacia arriba para $x > 0$ y concavidad hacia abajo para $x < 0$; 0 (0, 0) es un punto de inflexión. 1515. Campo de existencia de la función: $|x| < 1$. Simetría respecto del origen de coordenadas. La función es monótona creciente. Concavidad hacia arriba para $x > 0$ y concavidad hacia abajo para $x < 0$; punto de inflexión: $x = 0$, $y = 0$. Asíntotas $x = \pm 1$. 1516. Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero de la función: $x = 0$. No hay puntos de extremo, la función es creciente. Punto de inflexión: $x = 0$, $y = 0$. Asíntotas: $y = x - \frac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$ e $y = x + \frac{\pi}{2}$ cuando $x \to +\infty$
1517. Cero de la función $x \approx -5{,}95$. Mínimo $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1{,}285$ para $x = 1$; máximo $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1{,}856$ para $x = -1$. Concavidad hacia arriba

para $x > 0$ y concavidad hacia abajo para $x < 0$; punto de inflexión $x = 0$, $y = \pi/2$. Asíntotas: $y = \frac{x}{2} + \pi$ cuando $x \to -\infty$ e $y = \frac{x}{2}$ cuando $x \to +\infty$. 1518. Simetría respecto del eje Oy. La función no es negativa; cero $x = 0$. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$. Concavidad hacia arriba. Asíntotas: $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ cuando $x \to -\infty$ e $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ para $x \to +\infty$. 1519. Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero de la función $x = 0$. Máximo $y = -\frac{\pi}{2}$ (punto anguloso) para $x = 1$; máximo $y = \frac{\pi}{2}$ (punto anguloso) para $x = 1$. Punto de inflexión $x = 0$, $y = 0$. Asíntota $y = 0$. 1520. Simetría respecto del eje Oy. La función es no-negativa; cero $x = 0$. Mínimo $y = 0$ para $x = 0$ (punto anguloso). Concavidad hacia abajo. Asíntota $y = \pi$. 1521. Punto de discontinuidad de la función $x = 0$. Cero de la función $x = -2$. Mínimo $y = 4\sqrt{e} \approx 6{,}59$ para $x = 2$; máximo $y = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ para $x = -1$. Punto de inflexión $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{8}{5} e^{-5/2} \approx 0{,}13$. Asíntotas: $x = 0$ e $y = x + 3$. 1522. Campo de existencia de la función $|x| \geqslant 1$. Simetría respecto del eje oy. Máximo en la frontera $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}67$ para $x = \pm 1$. Concavidad hacia arriba. Asíntota $y = 1$. 1523. Campo de existencia de la función: $x < 1$ y $x > 2$. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas (0, ln 2) y (1/3, 0). Máximo $y \approx 1{,}12$ para $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -0{,}72$. Asíntotas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$. 1524. Campo de existencia de la función $|x| \leqslant a$. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(0, -a)$ y $(0{,}67\,a, 0)$ (aproximadamente). La función es monótona creciente. Mínimo en la frontera $y = -\frac{\pi}{2} a$ para $x = -a$ y máximo en la frontera $y = \frac{\pi}{2} a$ para $x = a$. Concavidad hacia arriba.

1525. Campo de existencia de la función: $x \leqslant 0$ y $x \geqslant \frac{2}{3}$. Mínimo en la frontera $y = 0$ para $x = 0$; máximo en la frontera $y = \pi$ para $x = \frac{2}{3}$. Concavidad hacia abajo para $x \leqslant 0$ y concavidad hacia arriba para $x \geqslant \frac{2}{3}$. Asíntota $y = \frac{\pi}{3}$. 1526. Campo de existencia: $x > 0$. La función es positiva. Mínimo $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0{,}692$ para $x = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$; Máximo en la frontera $y = 1$ para $x = +0$. Concavidad hacia arriba. 1527. Campo de existencia de la función $x > 0$. Mínimo en la frontera $y = 0$ para $x = +0$; máximo $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1{,}44$

para $x = e$. Asíntota $y = 1$. **1528**. Campo de existencia: $x > -1$, $x \neq 0$. La función es positiva. Punto de discontinuidad evitable: $x = 0$. No hay puntos de extremo; la función es decreciente. Concavidad hacia arriba. Asíntotas: $x = -1$ e $y = 1$. **1529**. La función es monótona para $x > 0$. Mínimo en la frontera $y = 0$ para $x = +0$. Asíntota $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$. **1530**. La función es positiva. Simetría respecto del eje Oy. Puntos de discontinuidad: $x = \pm 1$. Mínimo $y = e$ para $x = 0$; máximo $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}15$ para $x = \pm\sqrt{3}$. Cuatro puntos de inflexión. Asíntotas: $x = -1$ cuando $x \to -1 + 0$; $x = 1$ cuando $x \to 1 - 0$ e $y = 0$ cuando $x \to \infty$. **1531**. Las funciones x e y son no-negativas; $x_{min} = 0$ para $t = -1$; $y_{min} = 0$ para $t = 1$. Concavidad hacia arriba para $t > -1$ y concavidad hacia abajo para $t < -1$. **1532**. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(0, 0)$ para $t = 0$; $(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ para $t = \pm\sqrt{3}$ y $(0, -2)$ para $t = 2$; $x_{max} = 1$ e $y_{max} = 2$ para $t = 1$ (punto de retroceso); $y_{min} = -2$ para $t = -1$. Concavidad hacia arriba para $t < 1$ y concavidad hacia abajo para $t > 1$. **1533**. Punto de intersección con los ejes de coordenadas: $(0, 0)$ para $t = 0$; $x_{max} = 0$ para $t = 0$, $x_{min} = 4$ para $t = 2$; y decrece cuando t crece. Punto de inflexión $(-0{,}08; 0{,}3)$ para $t \approx -0{,}32$ (aproximadamente). Asíntotas: $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$. **1534**. Punto de intersección con el eje Oy: $(0, 1)$ para $t = 0$; punto de intersección con el eje Ox: $(-1, 0)$ para $t = \infty$. Extremos en la frontera: $x_{min} = 0$ e $y_{max} = 1$ para $t = 0$; $x_{max} = -1$ e $y_{min} = 0$ para $t = \infty$. No hay puntos de inflexión. Asíntota $y = \frac{1}{2}$. Concavidad hacia arriba para $|t| > 1$ y concavidad hacia abajo para $|t| < 1$. **1535**. Las funciones x e y son positivas; $x_{min} = 1$ e $y_{min} = 1$ para $t = 0$ (punto de retroceso). Concavidad hacia arriba para $t < 0$; concavidad hacia abajo para $t > 0$. Asíntota $y = 2x$ cuando $t \to +\infty$. **1536**. Campo fundamental: $[0, \pi]$. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ para $t = \frac{\pi}{6}$; $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ para $t = \frac{\pi}{4}$; $(-a, 0)$ para $t = \frac{\pi}{2}$; $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ para $t = \frac{3\pi}{4}$; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ para $t = \frac{5\pi}{6}$. Extremos: $x_{max} = a$ e $y_{max} = a$ para $t = 0$; $y_{min} = -a$ para $t = \frac{\pi}{3}$; $x_{min} = -a$ para $t = \frac{\pi}{2}$; $y_{max} = a$ para $t = \frac{2\pi}{3}$; ; $x_{max} = a$ e $y_{min} = -a$ para $t = \pi$. Concavidad hacia arriba para $0 < t < \frac{\pi}{2}$; concavidad hacia abajo para $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. **1537**. Las funciones x e y son no-negativas y periódicas; el campo fundamental es $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. . Extremos: $x_{min} = 0$ e $y_{max} = 1$ para $t = \frac{\pi}{2}$ y $x_{max} = 1$ e $y_{min} = 0$ para $t = 0$. Concavidad hacia arriba. **1538**. Campo de existencia: $t > 0$. Simetría respecto de la recta $x + y = 0$. Extremos: $x_{min} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$, $y = -e \approx -2{,}72$ para $t = \frac{1}{e}$; $y_{max} = \frac{1}{e}$, $x = e$ para $t = e$. Puntos de inflexión: $x_1 = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx -0{,}34$, $y_1 = -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx -5{,}82$ para $t = e^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}24$ y $x_2 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$ para $t = e^{\sqrt{2}} \approx 4{,}10$. Cuando $t = \frac{1}{e}$ — cambia el sentido de la concavidad. Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$.

1539. Las funciones x e y son periódicas, de período $T = 2\pi$; campo fundamental $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Simetría de la curva respecto de los ejes de coordenadas. La curva tiene dos ramas. Extremos: $x_{min} = a$, $y = 0$ para $t = 0$; $x_{max} = -a$, $y = 0$ para $t = \pm\pi$. Concavidad hacia arriba para $-\pi < t < -\pi/2$ y $0 < t < \pi/2$; concavidad hacia abajo para $-\pi/2 < t < 0$ y $\pi/2 < t < \pi$. **1540**. Simetría respecto del eje Oy; $y_{min} = 0$, $x = 0$ para $t = 0$. Concavidad hacia abajo.

1541. Las ecuaciones paramétricas son: $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$ $(-\infty < t < +\infty)$. Simetría respecto de la recta $y = x$. Punto de intersección con los ejes de coordenadas $0\ (0, 0)$ (punto doble). $x_{max} = a\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59\, a$ para $y = a\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2\, a$; $y_{max} = a\sqrt[3]{4}$ para $x = a\sqrt[3]{2}$. Asíntota $x + y + a = 0$. **1542**. Simetría respecto del origen de coordenadas, de los ejes de coordenadas y de las bisectrices de los ángulos coordenados. $0\ (0, 0)$ es un punto aislado. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$, $|x|_{min} = 1$ para $y = 0$; $|x|_{max} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1{,}10$ para $|y| = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$; $|y|_{min} = 1$ para $x = 0$ $|y|_{max} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ para $|x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. **1543**. Las ecuaciones paramétricas son: $x = \frac{1 - t^3}{t^2}$, $y = \frac{1 - t^3}{t}$, donde $t = \frac{y}{x}$ $(-\infty < t < +\infty)$. La curva tiene dos ramas. Simetría respecto de la recta $x + y = 0$ Extremos: $x_{min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1{,}89$, $y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2{,}38$ para $t = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}26$; $y_{max} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ para $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0{,}79$. Puntos de inflexión: $x_1 \approx 2{,}18$, $y_1 \approx -4{,}14$ para $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \approx -1{,}90$; $x_2 \approx 4{,}14$, $y_2 \approx -2{,}18$ para $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})} \approx -0{,}53$; para $t = -\sqrt[3]{2}$ la concavidad cambia de sentido. **1544**. La curva consta de la recta $y = x$ y de la rama hiperbólica $x = (1 + t)^{\frac{1}{t}}$, $y = (1 + t)^{1 + \frac{1}{t}}$ $(-1 < t < +\infty)$. (e, e) es un punto doble. Concavidad hacia arriba para $x \neq y$. Asíntotas: $x = 1$ e

$y = 1$. **1545**. Campo de existencia: $|x| \geqslant \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}88$. Simetría respecto de los ejes de coordenadas. Mínimo en la frontera $|y| = 0$ para $x = \pm\ln(1+\sqrt{2})$. Concavidad hacia abajo para $y > 0$ y concavidad hacia arriba para $y < 0$. Asíntotas: $y = x$ e $y = -x$. **1546**. Campo de existencia de la función: $r \geqslant 0$, $|\varphi| \leqslant \alpha$, donde $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. La curva es cerrada. Simetría respecto del eje polar. Máximo $r = a + b$ para $\varphi = 0$; mínimo en la frontera $r = 0$ para $\varphi = \pm\alpha$. **1547**. Campo de existencia $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi$; $\frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}$. La función r es periódica, de período $\frac{2\pi}{3}$. La curva es cerrada y tiene tres pétalos iguales. Ejes de simetría: $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ y $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. El origen de coordenadas O (0, 0) es un punto triple. Para $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ se tiene: máximo $r = a$ para $\varphi = \frac{\pi}{6}$ y mínimo $r = 0$ para $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **1548**. Campo de existencia de la función $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5}{6}\pi$; el período es $\frac{2\pi}{3}$. Mínimo $r = a$ para $\varphi = 0$ y $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$. Asíntotas $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. **1549**. Es una espiral, para la cual el origen de coordenadas es un punto asintótico; r es monótona decreciente para φ creciente. Asíntota $\varphi = 1$. **1550**. Campo de existencia $r \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62$. Máximo en la frontera $\varphi = \pi$ para $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; mínimo $\varphi = \arccos\frac{1}{4} \approx \text{arc } 75°30'$ para $r = 2$. Asíntota $r\cos\varphi = 1$ cuando $r \to +\infty$. **1551**. Familia de parábolas con los vértices $(1, a-1)$ (mínimos). Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas son $(0, a)$ y $(1 \mp \sqrt{1-a}, 0)$ (para $a \leqslant 1$). Concavidad hacia arriba. **1552**. Una familia de hipérbolas si $a \neq 0$ y la recta $y = x$ si $a = 0$. Mínimos $y = 2|a|$ para $x = |a|$ y máximos $y = -2|a|$ para $x = -|a|$ $(a \neq 0)$. Asíntotas $y = x$ y $x = 0$. **1553**. Una familia de elipse si $0 < a < +\infty$; una familia de hipérbolas si $-\infty < a < 0$; la recta $y = x$ si $a = 0$. Todas las curvas de las familias pasan por los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$. Para $y \geqslant x$ se tiene: 1) máximo $y = \sqrt{1+a}$ para $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$, si $a > 0$; máximo $y = -\sqrt{1+a}$ para $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, si $-1 < a < 0$; mínimos en la frontera $y = \mp 1$ para $x = \mp 1$ $(a \neq 0)$, 2) concavidad hacia abajo. Para $y \leqslant x$ se tiene: 1) mínimo $y = -\sqrt{1+a}$ para $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, si $a > 0$; mínimo $y = \sqrt{1+a}$ para $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$, si $-1 < a < 0$; máximos en la frontera $y = \mp 1$ para $x = \mp 1$;

2) concavidad hacia arriba. Asíntotas: $y = (1 + \sqrt{-a})x$ e $y = (1 - \sqrt{-a})x$, si $a < 0$. **1554**. Una familia de curvas exponenciales, si $a \neq 0$; la recta $y = 1 + \frac{x}{2}$, si $a = 0$. Punto común de la familia (0, 1). Mínimos $y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a)$ para $x = \frac{1}{a}\ln 2a$, si $a > 0$; y es monótona creciente si $a \leqslant 0$. Asíntota $y = \frac{x}{2}$. **1555**. Una familia de curvas que pasan por el punto 0 (0, 0) y que tienen una tangente común con la recta $y = x$. Máximo $y = ae^{-1} \approx 0{,}37\,a$ para $x = a$, si $a > 0$; mínimo $y = ae^{-1}$ para $x = a$, si $a < 0$. Punto de inflexión $x = 2a$, $y = 2ae^{-2} \approx 0{,}27a$. Asíntota $y = 0$. **1558**. $\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. **1559**. $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

1560. La base del sistema de logaritmos no tiene que ser superior a $e^{\frac{1}{e}} \approx 1{,}445$. **1561**. Un cuadrado de lado $\sqrt{S}$. **1562**. Los ángulos agudos del triángulo son iguales a 30° y 60°. **1563**. La altura del bote $H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ tiene que ser igual al diámetro de su base; el área de la superficie total $P = \sqrt{54\pi V^2}$. **1564**. $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$, donde 2α es el arco del segmento y 2φ es el arco que subtiende el lado del rectángulo. **1565**. Los lados del rectángulo son $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$. **1566**. Si $h > b$, el perímetro P del rectángulo inscrito de base x y altura y tiene un máximo en la frontera para $y = h$; si $h < b$, el perímetro P tiene un mínimo en la frontera para $y = 0$; si $h = b$, el perímetro P es constante. **1567**. $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1568**. Las dimensiones del paralelepípedo son: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ y $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **1569**. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **1570**. $\pi R^2(1+\sqrt{5}) \approx 81\,\%$ del área de la esfera. **1571**. El volumen del cono es el doble del volumen de la esfera. **1572**. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **1573**. Si $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2}$, el máximo del área de la superficie total del cilindro se alcanza para $r = \frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, donde r es el radio de la base del cilindro. Si $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, entonces, para $r = R$ se tiene un máximo en la frontera. **1574**. $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$.

1575. 1; 3. **1576**. Si $b \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$, el máximo de la longitud de la cuerda $MB = \frac{a^2}{c}$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y el punto M tiene las coordenadas x e y, se

alcanza para $x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}$; $y=\frac{b^3}{c^2}$; si $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$, el máximo frontera de la longitud de la cuerda $MB=2b$ se alcanza para $x=0$, $y=b$. **1577.** $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$; **1578.** El mínimo del área de la superficie se alcanza para $r=h=\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$, donde r es el radio de la base del cilindro y h es su altura. **1579.** $\varphi=60^\circ$. **1580.** El trapecio está circunscrito en la circunferencia. los lados laterales son: $AB=CD=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. **1581.** $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx \text{arc } 294^\circ$, donde α es el ángulo central del sector que queda. 1582. $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$, si $\arccos\frac{q}{p}\geq \text{arctg}\,\frac{a}{b}$; $\varphi=\text{arctg}\,\frac{a}{b}$, si $\arccos\frac{q}{p}<\text{arctg}\,\frac{a}{b}$. 1583. $\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. **1584.** $AM=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. **1585.** La distancia del punto luminoso al centro de la esfera grande es igual a $x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}$, si $a\geq r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ y $x=a-r$, si $r+R<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ donde a es la distancia entre los centros de las esferas. **1586.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1587.** $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. **1588.** $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **1589.** arctg k. **1590.** Si $l\leqslant 4a$ el ángulo de inclinación de la barra se determina por la fórmula $\cos\alpha=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$; si $l>4a$ no hay posición de equilibrio.

1591 $k=-3$; $b=3$; $y=3(1-x)$. 1592 $a=\frac{1}{2}e^{x_0}$; $b=e^{x_0}(1-x_0)$; $c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right)$. **1593.** a) El primer orden; b) el segundo; c) el segundo. **1595.** a) $\sqrt{2}$, (2, 2); b) 500.000, (150, 500.000) (aproximadamente).

1596. $p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$. 1597. $\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, donde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es la excentricidad de la elipse. 1598. $\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, donde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ es la excentricidad de la hipérbola. **1599.** $3|axy|^{\frac{1}{3}}$. 1600. $\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, donde ε es la excentricidad de la elipse.

1601. $2\sqrt{2ay}$. 1602. at. 1604. $\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$. 1605. $\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$.

1606. $r\sqrt{1+m^2}$. 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. 1608. $\frac{a^2}{3r}$. 1609. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$.

1610. $x_0\approx 680$ m. **1611.** La parábola semicúbica $27p\eta^2=8(\xi-p)^3$ **1612.** La astroide $(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=c^{4/3}$, donde $c^2=a^2-b^2$. **1613.** La astroide $(\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3}=2a^{2/3}$. **1614.** La catenaria $\eta=a\,\text{ch}\,\frac{\xi}{a}$. **1615.** La espiral logarítmica. $\rho=mae^{m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$ 1616. $\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau)$; $\eta=-2a+a(1-\cos\tau)$, donde $\tau=t-\pi$. 1617. $x_1=-2{,}602$; $x_2=0{,}340$; $x_3=2{,}262$. 1618. $x_1=-0{,}724$; $x_2=1{,}221$. 1619. $x=2{,}087=\text{arc } 119^\circ35'$. 1620. $\pm 0{,}824$. 1621. $x_1=0{,}472$; $x_2=9{,}999$. 1622. $x_1=2{,}5062$. 1623. $x_1=4{,}730$; $x_2=7{,}853$. 1624. $x=-0{,}56715$. 1625. $x=\pm 1{,}199678$. 1626. $x_1=4{,}493$; $x_2=7{,}725$; $x_3=10{,}904$. 1627. $x_1=2{,}081$; $x_2=5{,}940$.

Capítulo III

Para abreviar, en las respuestas de este capítulo se ha omitido la constante aditiva arbitraria C. 1628. $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$. 1629. $\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7$. 1630. $x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4$. 1631. $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|$. 1632. $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}$. 1633. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$. 1634. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. 1635. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$. 1636. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$. 1637. $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. 1638. $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$. 1639. $x-\text{arctg}\,x$. 1640. $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 1641. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. 1642. $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 1643. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$. 1644. $\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}$. 1645. $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1646. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$. **1647.** $x-\cos x+\sin x$. **1648.** $\cos x+\sin x$ $\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$; $2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)$ $\quad \frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi$. **1649.** $-x-\text{ctg}\,x$. **1650.** $-x+\text{tg}\,x$. **1651.** $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x$. **1652.** $x-\text{th}\,x$. **1653.** $x-\text{cth}\,x$.

1655. $\ln|x+a|$. 1656. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$. 1657. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. 1658. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$.

1659. $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$. 1660. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. 1661. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

1662. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$. 1663. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

1664. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|$. 1665. $-\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$.

1666. $-x\sin 5a-\frac{1}{5}\cos 5x$. 1667. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

1668. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 1669. $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 1670. $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

1671. $\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]$. 1672. $2\operatorname{th}\frac{x}{2}$. 1673. $-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}$.

1674. $-\sqrt{1-x^2}$. 1675. $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. 1676. $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. 1677. $-\frac{1}{2(1+x^2)}$.

1678. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. 1679. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$. 1680. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 1681. $\cos\frac{1}{x}$.

1682. $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. 1683. $-\arcsin\frac{1}{|x|}$. 1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 1685. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1686. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$. 1687. $2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})$ $(x(1+x)>0)$.

1688. $2\arcsin\sqrt{x}$. 1689. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 1690. $\ln(2+e^x)$. 1691. $\operatorname{arctg}e^x$.

1692. $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})$. 1693. $\frac{1}{3}\ln^3 x$. 1694. $\ln|\ln(\ln x)|$. 1695. $\frac{1}{6}\sin^6 x$.

1696. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. 1697. $-\ln|\cos x|$. 1698. $\ln|\sin x|$. 1699. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$.

1700. $\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}$ $(a^2\neq b^2)$. 1700.1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|$.

1700.2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$. 1700.3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})$.

1701. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x}$. 1702. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. 1703. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

1704. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 1705. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. 1706. $2\operatorname{arctg}e^x$.

1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right)$. 1708. $3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}$. 1709. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

1710. $-\frac{1}{\arcsin x}$. 1711. $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})$. 1712. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.

1713. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. 1714. $-\frac{1}{15(x^3+1)^5}$.

1715. $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$ si $n\neq-2$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$ si $n=-2$.

1716. $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$. 1717. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$. 1718. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

1719. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. 1720. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 1721. $\frac{4}{3}x^3-$ $-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$. 1727.1. $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$. 1722. $-x-2\ln|1-x|$.

1723. $\frac{1}{2}(1-x)^2+\ln|1+x|$. 1724. $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|3+x|$.

1725. $x+\ln(1+x^2)$. 1726. $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$.

1727. $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$. 1728. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+$ $+x-\ln|x+1|$. 1729. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$. 1730. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$.

1731. $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$. 1732. $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$.

1733. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. 1734. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. 1735. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

1736. $\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. 1737. $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$.

1738. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$. 1739. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$.

1740. $\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$ $(a\neq b)$. 1741. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$.

1742. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. 1743. $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$. 1744. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$.

1745. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. 1746. $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$.

1747. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$. 1748. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. 1749. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+\frac{1}{32}\sin 4x$. 1750. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. 1751. $-x-\operatorname{ctg}x$.

1752. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|$. 1753. $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+$ $+\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$. 1754. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. 1755. $-\frac{1}{\sin x}+$ $+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 1756. $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|$. 1757. $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

1758. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. 1759. $x-\ln(1+e^x)$. 1760. $x+2\operatorname{arctg}e^x$.

1761. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. 1762. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. 1763. $\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x$. 1764. $\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+$ $+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x$. 1765. $-(\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x)$. 1766. $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}$.

1767. $-\frac{1+55x^2}{6\,600}(1-5x^2)^{11}$. 1768. $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$.

1769. $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$. 1770. $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3}$.

1771. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$. 1772. $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$.

1773. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. 1774. $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. 1775. $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+$ $+2\ln(1+e^{x/2})$. 1776. $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})$. 1777. $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$. 1778. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1779. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$. 1780. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

1781. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 1782. $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$. 1783. $-\frac{3a+x}{2}\times$ $\times\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. 1784. $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1785. $\frac{2x-(a+b)}{4}\times$ $\times\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1786. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+$ $+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. 1787. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

1788. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, si $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+$ $+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, si $x<-a$. 1789. $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, si $x+a>0$ y $x+b>0$; $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$, si $x+a<0$ y $x+b<0$. 1790. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+$ $+\sqrt{x+b})$, si $x+a>0$ и $x+b>0$. 1791. $x(\ln x-1)$ 1792. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\times$ $\times\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\neq-1)$. 1793. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$. 1794. $\frac{2}{3}x^{3/2}\times$ $\times\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. 1795. $-(x+1)e^{-x}$. 1796. $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$.

1797. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$. 1798. $x\sin x+\cos x$. 1799. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$.

1800. $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$. 1801. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x$. 1802. $x\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1803. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 1804. $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x$.

1805. $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$. 1806. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$.

1807. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. 1808. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 1809. $-\sqrt{x}+$ $+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 1810. $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$. 1811. $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$.

1812. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. 1813. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-$ $-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1814. $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

1815. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$. 1816. $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$

1817. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a\neq0)$. 1818. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+$ $+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$ $(a\neq0)$. 1819. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$.

1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. 1821 $\frac{x^2}{4}-$ $-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}$ 1822. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. 1823. $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-$ $-6(2-x)\sin\sqrt{x}$. 1824. $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. 1825. $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

1826. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$ 1827. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

1828. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. 1829. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. 1830. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-$ $-\cos 2x)$. 1831. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$. 1832. $-x+$ $+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arcctg}(e^x)$. 1833. $-[x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(e\sin x)]$.

1834. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$. 1835. $\frac{e^x}{x+1}$. 1836. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, если $ab>0$; $\frac{\operatorname{sgn}a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$, если $ab<0$. 1837. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$.

1838. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$. 1839. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$. 1840. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1841. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha\neq k\pi$, k es entero). 1842. $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$.

1843. $\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$. 1844. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$.

1845. $\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}{2}$. 1846. $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$, si $b>0$; $\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$, si $a>0$ y $b<0$. 1847. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

1848. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$. 1849. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)$.

1851. $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. 1852. $\sqrt{x^2+x+1}+$
$+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. 1853. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$.

1853.1. $\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}$. 1854. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}|$.

1555. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. 1856. $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$.

1857. $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ $\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

1858. $\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$. 1859. $\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{2})$.

1860. $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ $(|x+1|>\sqrt{6})$.

1861. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$. 1862. $\frac{2x+1}{4}\times$
$\times\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)$. 1863. $\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-$
$-\frac{1}{2}\ln|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}|$. 1864. $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}-$
$-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$ $\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

1865. $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|$. 1866. $\ln|x-2|+\ln|x+5|$.

1867. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$. 1868. $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-$
$-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$. 1869. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-$
$-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$. 1870. $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

1871. $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. 1872. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$.

1873. $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. 1874. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\times$
$\times\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$. 1875. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. 1876. $\operatorname{arctg}x+$
$+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. 1877. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. 1878. $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$.

1879. $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)$. 1880. $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. 1881. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1882. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1883. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 1885. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+$
$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 1886. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3$.

1887. $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1888. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1889. $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\times$
$\times\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1)$. 1890. $a+2b+3c=0$. 1891. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+$
$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. 1892. $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1893. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$. 1894. $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)$. 1895. $\frac{x}{4(x^4+1)}+$
$+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$. 1896. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\times$
$\times\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1897. $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-$
$-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x$. 1898. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$. 1899. $-\frac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}$.

1900. $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (toda la integral). 1901. $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1902. $a\gamma+c\alpha=2b\beta$. 1903. $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-$
$-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. 1904. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2$. 1905. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$. 1906. $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$.

1907. $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$. 1908. $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)$.

1909. $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. 1910. $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)$.

1911. $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)$ $(n\neq 0)$. 1912. $\frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg}x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$ $(n\neq 0)$.

1913. $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. 1914. $\frac{1}{10(x^{10}+1)}+\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. 1915. $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$.

1916. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$. 1917. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 1918. $\frac{1}{\sqrt{5}}\times$

1941. $\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. **1942.** $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$. **1943.** $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

1944. $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1945. $\left(-\frac{a^4x}{16}-\frac{a^2x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$. **1946.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. **1947.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. **1948.** $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. **1949.** $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$. **1950.** $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$, donde $x<-2$ ó $x>0$. **1951.** $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$ $(a\neq 0)$. **1952.** $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$.

1953. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$. **1954.** $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1955.** $-\frac{1+x}{2}\times\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}$. **1956.** $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{|x-2|}$ $(x<1$ ó $x>3)$. **1957.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

1958. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1959.** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1960.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\arctg\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

1961. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$. **1962.** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|$.

1965. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)}-$

$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$. **1966.** $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, donde $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. **1967.** $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg} z$, donde $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.
1968. $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, donde $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$. **1969.** $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|$, donde $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.
1970. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$, donde $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$. **1971.** $\frac{x}{4}\times(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1972.** $\frac{1}{3}\sqrt{z}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\times\left(\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)$, donde $z=\frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x$. **1974.** $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$.
1975. $\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]$. **1976.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$.
1977. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|$. **1978.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\ (|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1})$.
1979. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\times\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$ si $x>0$. **1982.** $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}$. **1983.** $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, donde $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.
1984. $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, donde $z=\sqrt{1-x^2}$. **1985.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, donde $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1986.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$, donde $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **1987.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$, donde $z=\sqrt[6]{1+x^6}$. **1988.** $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, donde $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, donde $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m=\frac{2}{k}$, donde $k=\pm1, \pm2, \ldots$ **1991.** $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$. **1992.** $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$ **1993.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x$.
1994. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. **1995.** $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$. **1997.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1999.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2000.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\left|\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **2001.** $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. **2002.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+3\ln|\operatorname{tg} x|$. **2003.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2004.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **2005.** $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$. **2006.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$.
2007. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. **2008.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$, donde $t=\sqrt[3]{\sin x}$. **2009.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$. **2010.** $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, donde $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$. **2011.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$; $I_6=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$; $K_8=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$.
2012. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **2013.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$. **2014.** $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}$. **2015.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$.
2016. $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$ **2017.** $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$. **2018.** $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$. **2019.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\times$

$\times \ln \left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, si $\sin(a-b) \neq 0$. **2020.** $\frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$, si $\cos(a-b) \neq 0$. **2021.** $\frac{2}{\sin(a-b)} \ln \left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$, si $\sin(a-b) \neq 0$.

2022. $\frac{1}{\cos a} \ln \left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\cos a \neq 0)$. **2023.** $\frac{1}{\sin a} \ln \left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\sin a \neq 0)$.

2024. $-x+\operatorname{ctg} a \cdot \ln \left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$ $(\sin a \neq 0)$. **2025.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$.

2026. $\frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$. **2027.** $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}} \times$ $\times \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right|$. **2028.** a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, si $0<\varepsilon<1$; b) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$, si $\varepsilon>1$. **2029.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ $\times \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$. **2030.** $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg} x}{b}\right)$. **2031.** $\frac{(2b^2)^{-1}z}{(a^2z^2+b^2)}+\frac{1}{2ab^3} \operatorname{arctg}\frac{az}{b}$ $(ab \neq 0)$, donde $z=\operatorname{tg} x$. **2032.** $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$.

2033. $-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. **2034.** $-\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$. **2035.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$.

2036. $\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right\}$, donde $u=\operatorname{tg} 2x$. **2037.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$. **2038.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$.

2039. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right)$. **2040.** $-\frac{z}{4(z^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}$, donde $z=\operatorname{tg} x$.

2041. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, donde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2043. $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5} \ln|\sin x+2\cos x|$. **2043.1.** $0{,}1\,x+0{,}3 \ln|\sin x-3\cos x|$.

2044. $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34} \ln|5\sin x+3\cos x|$.

2045. $-\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{a\sin x+b\cos x}+\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, donde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2047.** $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5} \ln|\sin x-2\cos x+3|-$ $-\frac{6}{5} \operatorname{arctg} \frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}$. **2048.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)$.

2049. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}} \ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|$.

2051. $-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **2052.** $\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)+$ $+\frac{8}{5\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **2054.** $-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4} \ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$.

2055. $\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}} \ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$.

2056. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$.

2058. $\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right|$. **2059.** $A=$ $=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$.

2060. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$. **2061.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x-1}$ $(\operatorname{tg} x>0)$. **2062.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2} \times$ $\times \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$. **2063.** $-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \times$ $\times \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **2064.** $-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$ $(\cos a \neq 0)$.

2065. $I_n=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$, donde $n>2$ y $t=$ $=\sin\frac{x-a}{2}\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$. **2068.** $e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)$.

2069. $-e^{-x}(x^2+2)$. **2070.** $-\left(\frac{x^3}{5}-\frac{4x^3}{25}+\frac{24x}{625}\right)\cos 5x+$ $+\left(\frac{x^4}{5}-\frac{12x^2}{125}+\frac{24}{3125}\right)\sin 5x$. **2071.** $(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$.

2072. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)$. **2073.** $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, donde $t=\sqrt{x}$. **2074.** $e^{ax}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$. **2075.** $\frac{e^{ax}}{4} \times$ $\times\left[\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right]$. **2076.** $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-$

$-\cos x)+\cos x]$. **2077.** $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]$.

2078. $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]$.

2079. $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\right.$ $\left.+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x$. **2080.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$.

2082. $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$. **2083.** $e^x-\ln(1+e^x)$. **2084.** $-\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **2085.** $x-3\ln\left\{(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right\}-3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$.

2086. $x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$. **2087.** $-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$. **2088.** $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+$ $+\arcsin(e^{-x})$. **2089.** $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-$ $-\arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}$. **2090.** $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$. **2092.** $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\ldots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$.

2093. $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$. **2094.** $-e^{-x}-\operatorname{li}(e^{-x})$. **2095.** $e^4\operatorname{li}(e^{2x-4})-e^2\operatorname{li}(e^{2x-2})$.

2096. $\frac{e^x}{x+1}$. **2097.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\operatorname{li}(e^{2x-4})$.

2098. $x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x+\ldots+(-1)^{n-1}n(n-1)\ldots 2\ln x+$ $+(-1)^n n!]$. **2099.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)$. **2100.** $-\frac{1}{2x^2}\times$ $\times\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)$. **2101.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$. **2102.** $x\ln^2(x+$ $+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. **2103.** $-\frac{x}{2}+x\ln(\sqrt{1-x}+$ $+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x$. **2104.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2105.** $-\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$. **2106.** $-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+$ $+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ **2107.** $-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$.

2108. $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$. **2109.** $-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\times$ $\times\arccos\frac{1}{x}$. **2110.** $2|1-\sqrt{x}|+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. **2111.** $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-$ $-\ln\sqrt{1-x^2}$. **2112.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2113.** $x-\operatorname{arctg} x+$ $+\left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]$. **2114.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2115. $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2116.** $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$.

2117. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$. **2118.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch} x$. **2119.** $\frac{\operatorname{ch} 6x}{24}-\frac{\operatorname{ch} 4x}{16}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{8}$.

2120. $\ln\operatorname{ch} x$. **2121.** $x-\operatorname{cth} x$. **2122.** $0{,}5[\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\arcsin(e^{-2x})]$.

2123. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} 3^{-1/2}\left(2\operatorname{th}\frac{x}{2}+1\right)$. **2123.1.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x-2}{\sqrt{5}}$.

2123.2. $\frac{20}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right)$. **2123.3.** $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\operatorname{sh} x-4\operatorname{ch} x|$.

2124. $\frac{a\operatorname{ch} ax\sin bx-b\operatorname{sh} ax\cos bx}{a^2+b^2}$.

2125. $\frac{a\operatorname{ch} ax\cos bx+b\operatorname{sh} ax\sin bx}{a^2+b^2}$. **2126.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x$.

2127. $\frac{1}{8}\cdot\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **2128.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-$ $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$. **2129.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)\,(x\geqslant 0)$.

2130. $-\frac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}\;\;(0<x<1)$.

2131. $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\;(|x|<1)$.

2132. $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}\quad(x>0)$. **2133.** $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$.

2134. $\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, donde $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

2135. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$. **2136.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$.

2137. $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x\;(|x|<1)$. **2138.** $-\frac{1}{2}(1+x)^2+$ $+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|\,(x>0,\,x<-1)$.

2139. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$.

2140. $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)\,(1<x<2)$.

2141. $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$.

2142. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|\;\;(0<|x|<1)$.

2143. $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **2144.** $-\frac{x^2+7}{3}\sqrt{x^2+1}+$
$+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ $(|x|>1)$. **2145.** $\Big(\frac{3-x}{1-x}-$
$-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0<x<1)$.

2146. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$.
2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.
2149. $a\left[x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.
2150. $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **2151.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+$
$+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$ $(x>0)$. **2152.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
2153. $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$. **2154.** $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x$
$(|x|<1)$. **2155.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$.
2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arcctg}x$. **2157.** $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}+$
$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$ $(|x|<1)$. **2158.** $-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+$
$+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. **2159.** $\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arcctg}x$. **2160.** x^x
$(x>0)$. **2161.** $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ $(x<0)$. **2162.** $x-$
$-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}-\left(\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}\right)^2$. **2163.** $-\frac{\operatorname{cth}1}{4}[x-\ln(1+e^x\operatorname{ch}1)]-$
$-\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1}$. **2164.** $-2\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$.
2165. $e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **2166.** $\frac{x|x|}{2}$ **2167.** $\frac{x^2|x|}{3}$. **2168.** $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$.
2169. $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. **2170.** e^x-1, si $x<0$; $1-e^{-x}$,
si $x\geqslant 0$. **2171.** x, si $|x|\leqslant 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$, si $|x|>1$. **2172.** $\frac{x}{4}+$
$+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, donde $(x)=x-[x]$. **2173.** $\frac{[x]}{\pi}$ $\{[x]-$

$-(-1)^{[x]}\cos\pi x\}$. 2174. $x-\frac{x^3}{3}$ si $|x|\leqslant 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x$ si
$|x|>1$. 2175. x, si $-\infty<x\leqslant 0$; $\frac{x^2}{2}+x$, si $0\leqslant x\leqslant 1$; $x^2+\frac{1}{2}$, si
$x>1$. 2176. $xf'(x)-f(x)$. 2177. $\frac{1}{2}f(2x)$. 2178. $f(x)=2\sqrt{x}$. 2179. $x-\frac{x^2}{2}$.
2180. $f(x)=x$ si $-\infty<x\leqslant 0$; $f(x)=e^x-1$ si $0<x<+\infty$.

Capítulo IV

2181. $12\frac{1}{2}$. 2182. a) $\underline{S_n}=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_n}=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$;
b) $\underline{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$; c) $\underline{S_n}=\frac{10\,230}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$,
$\overline{S_n}=\frac{10\,230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$. 2183. $\underline{S_n}=31$. $\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$. 2184. $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$. 2185. 3.
2186. $\frac{a-1}{\ln a}$. 2187. 1. 2188. $\sin x$. 2189. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. 2190. $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$.
2191. $\ln\frac{b}{a}$. 2192. a) 0, si $|\alpha|<1$; b) $\pi\ln\alpha^2$, si $|\alpha|>1$.
2193.4. $\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$. 2201. En general, no. 2203. No necesariamente. 2206. $11\frac{1}{4}$. 2207. 2. 2208. $\frac{\pi}{6}$. 2209. $\frac{\pi}{3}$. 2210. 1.
2211. 1. 2212. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. 2213. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. 2214. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$.
2215. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 2216. a) La función subintegral $\frac{1}{x}$ y su primitiva $\ln|x|$ son discontinuas en el segmento de integración $[-1, 1]$; b) la función $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$, que desempeña el papel de primitiva, es discontinua para $0\leqslant x\leqslant 2\pi$; c) la función $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ es discontinua para $x=0$. 2217. $\frac{2}{3}$. 2218. $200\sqrt{2}$. 2219. $\frac{1}{2}$. 2220. $\ln 2$. 2221. $\frac{\pi}{4}$.
2222. $\frac{2}{\pi}$. 2223. $\frac{1}{p+1}$. 2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2225. $\frac{1}{e}$. 2226. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
2227. $\frac{5}{6}\pi$. 2228. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 2229. $x+\frac{1}{2}$. 2230. $\frac{1}{\ln 2}$. 2231. 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$.

2232. a) $2x\sqrt{1+x^4}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$; c) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$.
2233. a) 1; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) 0. 2233. 1. *A*. 2235. 1. 2237. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{t}{2}$.
2238. a) $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$, si $\alpha<0$; $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$, si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$; $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$, si $\alpha>1$;
b) $\frac{\pi}{2}$, si $|\alpha|\leqslant 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, si $|\alpha|>1$; c) 2, si $|\alpha|\leqslant 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, si $|\alpha|>1$.
2239. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. 2240. π. 2241. 4π. 2242. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 2243. 1. 2244. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2245. $\frac{1}{6}$. 2246. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2247. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. 2248. $2-\frac{\pi}{2}$. 2249. $\frac{\pi^2}{4}$.
2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2251. a) La función inversa $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ es biforme; b) la función $x=\frac{1}{t}$ es discontinua para $t=0$; c) no existe una rama uniforme y continua de la función $x=\operatorname{Arctg} t$, definida en un segmento finito y que tome los valores desde 0 hasta π. 2252. No. 2253. Sí, se puede.
2256. $f(x+b)-f(x+a)$. 2260. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. 2261. $\int_0^1[f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt+$
$+\int_{-1}^{0}[f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt$. 2262. $4n$. 2263. $\frac{\pi^2}{4}$.
2264. $\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$. 2268. $315\frac{1}{26}$. 2269. $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2270. $\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$.
2271. $-66\frac{6}{7}$. 2272. $-\frac{\pi}{3}$. 2273. $\frac{29}{270}$. 2274. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.
2275. $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. 2276. $2\pi\sqrt{2}$. 2277. $\frac{1}{6}$. 2278. $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.
2279. $\frac{3}{5}(e^\pi-1)$. 2280. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$. 2281. $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, si $n=2k$; $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, si $n=2k+1$. 2282. Véase el N° 2281. 2283. $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$. 2284. $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. 2285. Véase el № 2281.
2286. $I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. 2287. $I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$. 2290. $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$. 2291. 0, si n es par; π, si n es impar. 2292. $(-1)^n\pi$. 2293. $\frac{\pi}{2^n}$. 2294. $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. 2295. 0. 2296. 0.

2297. $\frac{1}{2^{2n}a}(1-e^{-2a\pi})\left[C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$. 2298. $\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$.
2299. $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. 2302. En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la derivada $F'(x)$ puede existir como no existir. 2303. $|x|+C$.
2304. $\arccos(\cos x)\mp C$. 2305. $x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}+C$. 2306. $\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C$. 2307. $C+\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. 2308. $\frac{1}{2}(|1+x|-|1-x|)+C$. 2309. -1. 2310. $14-\ln 7!$ 2311. $\frac{30}{\pi}$. 2312. $-\frac{\pi^2}{4}$. 2313. $\ln n!$.
2314. $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. 2315. $\frac{8}{3}$. 2316. a) $-$; b) $+$; c) $+$; d) $-$. 2317. a) La segunda; b) la segunda; c) la primera. 2318. a) $\frac{1}{3}$; b) $6\frac{2}{3}$; c) 10; d) $\frac{1}{2}\cos\varphi$.
2319. $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$, que es el semieje menor de la elipse. 2320. $v_m=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, donde v_1 es la velocidad final del cuerpo. 2321. $\frac{1}{2}i_0^2$. 2321.1. *A*. 2322.
2322. a) $\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; b) $\theta=\frac{1}{e}$; c) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=1$.
2323. $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta$ $(|\theta|<1)$. 2324. Está comprendida entre $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{10}$.
2325. $0{,}01-0{,}005\theta$ $(0<\theta<1)$. 2326.1. a) 1;
b) $f(0)\ln\frac{b}{a}$. 2328. $\frac{\theta}{50\pi}$ $(0<\theta<1)$. 2329. $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$. 2330. $\frac{\theta}{a}$ $(|\theta|<1)$.
2334. $\frac{1}{a}$. 2335. -1. 2336. π. 2337. π. 2338. $\frac{2}{3}\ln 2$. 2339. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
2340. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 2341. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2342. $\frac{\pi}{2}$. 2343. $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. 2344. 0.
2345. $\frac{\pi}{2}-1$. 2346. $\frac{a}{a^2+b^2}$. 2347. $\frac{b}{a^2+b^2}$. 2348. $I_n=n!$ 2349. $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\times\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. 2350. $I_n=n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$, donde C_n^k es el número de combinaciones de n elementos en grupos de k elementos.
2351. $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, si n es par, y $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, si n es impar. 2352 $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, si n es par; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, si n es impar. 2353. a) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 2354. $\frac{2\sqrt[4]{8e^{-\frac{\pi}{8}}}}{1-e^{-\pi}}$. 2356. a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0. 2357. a) 1; b) $\frac{1}{3}$;

c) 1; d) $\frac{1}{\alpha}f(0)$. 2358. Es convergente. 2359. Es convergente. 2360. Es divergente.

2361. Es convergente para $p>0$. 2362. Es convergente si $p>-1$ y $q>-1$. 2363. Es convergente, si $m>-1$, $n-m>1$. 2364. Es convergente para $1<n<2$. 2365. Es convergente para $1<n<2$. 2366. Es convergente, si $m>-2$, $n-m>1$. 2367. Es convergente para $n>0$ $(a\neq 0)$. 2368. Es divergente. 2369. Es convergente, si $p<1$, $q<1$. 2370. Es convergente para $n>-1$. 2370.1. Es convergente. 2371. Es convergente, si $\min(p, q)<1$, $\max(p, q)>1$. 2372. Es convergente. 2373. Es convergente. 2374. Es convergente, si $p>1$, $q<1$. 2375. Es convergente para $p>1$, q arbitrario, $r<1$ y para $p=1$ $q>1$, $r<1$. 2376. Es convergente, si $p_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; $\sum_{i=1}^{n} p_i>1$.

2376.1. Es convergente para $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha+\beta<-1$. 2377. Es convergente, si $P_n(x)$ no tiene raíces en el intervalo $[0, +\infty)$ y $n>m+1$. 2378. Es convergente, no absolutamente. 2379. Es convergente, no absolutamente. 2380. Es absolutamente convergente, si $-1<\frac{p+1}{q}<0$; es condicionalmente convergente, si $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$. 2380.1. Es convergente. 2380.2. Es convergente. 2381. Es absolutamente convergente, si $p>-2$, $q>p+1$; es condicionalmente convergente, si $p>-2$, $p<q\leqslant p+1$. 2382. Es condicionalmente convergente para $0<n<2$. 2383. Es absolutamente convergente para $n>m+1$; es condicionalmente convergente para $m<n\leqslant m+1$. 2385. No.

2392. $\ln\frac{1}{2}$. 2393. 0. 2394. π. 2395. 0. 2397. $\frac{a^2}{3}$ 2398. $4\frac{1}{2}$. 2399. $4\frac{1}{2}$. 2400. $9,9-8,1\lg e\approx 6,38$. 2400.1. $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0,56$. 2400.2. $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0,97$. 2401. $\frac{\pi}{2}$.

2402. πa^2. 2403. πab. 2404. $\frac{4}{3}a^2$. 2405. $\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2$. 2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. 2407. $3\pi a^2$.

2408. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2409. $\frac{2\pi}{n+2}$. 2410. $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\approx 0,546$. 2411. $(3\pi+2):(9\pi-2)$.

2412. $x=\operatorname{ch} S$, $y=\operatorname{sh} S$. 2413. $3\pi a^2$. 2414. $\frac{8}{15}$. 2415. $\frac{a^2}{3}(4\pi^2+3\pi)$. 2416. $6\pi a^2$.

2417. $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$. 2417.1. $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. 2418. a^2. 2419. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2420. $\frac{\pi a^2}{4}$.

2421. $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. 2422. $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. 2422.1. 11π. 2422.2. $\frac{1}{\pi}$. 2423. $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$.

2424. $\frac{1}{2}\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. 2424.1. $\frac{2}{3}$. 2424.2. $\frac{1}{\pi}$. 2424.3. $4\frac{4}{15}$. 2424.4. $\pi\times\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. 2425. $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. 2426. $\frac{3}{2}a^2$ 2427. $\pi a^2\sqrt{2}$. 2428. a^2.

2429. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2430. $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. 2431. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 2432. $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. 2433. $\sqrt{h^2-a^2}$. 2434. $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. 2435. $\frac{e^2+1}{4}$. 2436. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. 2437. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$.

2438. $a\ln\frac{a}{b}$. 2439. $4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. 2440. $6a$. 2441. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

2442. $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 2443. $8a$. 2444. $2\pi^2 a$. 2445. $2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\times\sqrt{\operatorname{ch} T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch} T}}{1+\sqrt{2}}$. 2445.1. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}2T-1)$.

2446. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. 2448. $8a$.

2449. $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2450. $\frac{3\pi a}{2}$. 2451. $a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$. 2452. $2+\frac{1}{2}\ln 3$.

2452.1. $6\frac{1}{3}$. 2452.2. $\operatorname{sh} R$. 2452.3. T. 2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0,73$. 2456. $\frac{bh}{6}(2a+c)$.

2457. $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. 2458. $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$.

2459. $\frac{1}{2}SH$. 2462. $\frac{2}{3}abc$. 2463. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2464. $\frac{8\pi abc}{3}$. 2465. $\frac{16}{3}a^3$.

2466. $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2467. $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. 2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2469. $\frac{4}{15}$. 2470. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$.

2472. $\frac{3}{7}\pi ab^2$. 2473. a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$. 2474. a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $2\pi^2$. 2475. a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. 2476. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π. 2477. $2\pi^2 a^2 b$. 2478. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2479. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.

2480. a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^2 a^3$; c) $7\pi^2 a^3$. 2481. a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$. 2481.1. $V_x=\frac{64}{35}\pi$; $V_y=\frac{64}{105}\pi$. 2483. a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; b) $\frac{13}{4}\pi^2 a^3$. 2484. a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. 2484.1. $\frac{2}{3}(\pi^4-6\pi^2)a^3$. 2484.2. $\frac{2}{3}\pi$. 2485. $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$.

2486. $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. 2487. $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\times\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$. 2488. $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$.

2489. a) $\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2]$; b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-\right.$ $\left.-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. 2490. a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\times$ $\times\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, donde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es la excentricidad de la elipse. 2491. $4\pi^2ab$.

2492. $\frac{12}{5}\pi a^2$. 2493. a) $\pi a\left(2b+a\,\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a}\right)$; b) $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right)$.

2494. $4\pi a^2$. 2495. a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. 2496. $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$.

2497. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 2498. a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; c) $4\pi a^2$. 2499. $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}\times$ $\times[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx1{,}013$. 2500. $V=\frac{4\pi}{3}p^3$; $P=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+$ $+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2501. $M_1=2a^2$; $M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. 2501.1. $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$.

2502. $M_1=\frac{bh^2}{6}$; $M_2=\frac{bh^3}{12}$. 2502.1. $I_x=\frac{8}{35}a^4$, $I_y=\frac{8}{5}a^4$, $r_x=a\sqrt{\frac{6}{35}}$, $r_y=a\sqrt{\frac{6}{5}}$.

2503. $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}$. 2504. $M_1=\frac{\pi r^2h^2}{12}$, $M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. 2504.1. $I=\frac{2}{5}MR^2$.

2507. $x_0=a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0=0$. 2508. $\left(\frac{9}{20}a,\frac{9}{20}a\right)$. 2509. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$. 2510. $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$.

2511. $\varphi_0=\varphi-\alpha$, donde $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{1}{2m}$; $r_0=\frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. Espiral logarítmica. $r_0=\frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. 2512. $\varphi_0=0$, $r_0=\frac{5}{6}a$. 2513. $x_0=\pi a$, $y_0=\frac{5}{6}a$.

2514. $x_0=\frac{2}{3}a$, $y_0=0$. 2515. $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$. 2516. 75 кg. 2517. $A_h=mg\frac{Rh}{R+h}$, donde R es el radio de la Tierra; $A_\infty=mgR$. 2518. 0,5 Kgm. 2519. 1740 Kgm.

2520. $\frac{2}{3}a^3$. 2521. $708\frac{1}{3}T$. 2522. $v_0T+\frac{a}{2}T^2$. 2523. $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5$. 2524. Las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes de coordenadas son: $X=0$, $Y=-\frac{2km\mu_0}{a}$, donde k es la constante de gravitación.

2525. $2\pi km\delta_0\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, donde k es la constante de gravitación.

2526. Aproximadamente, 3 horas. 2527. La vasija tiene que estar limitada por una superficie tomada por la rotación de la curva $y=Cx^4$ en torno del eje vertical Oy. 2528. $Q=Q_0\cdot2^{-\frac{t}{1600}}$. 2529. 99,92%. 2530. $\frac{\gamma H^2}{6E}$.

En las respuestas referentes al cálculo aproximado de las integrales definidas se dan los valores de las tablas.

2531. −6,2832. 2532. 0,69315. 2533. 0,83566. 2534. 1,4675,

2535. 17,333. 2536. 5,4024. 2537. 1,37039. 2538. 0,2288. 2539. 0,915966. 2540. 3,14159. 2541. 1,463. 2542. 0,3179. 2543. 0,8862. 2544. 51,04.

2545.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

Capítulo V

2546. $\frac{2}{3}$. 2547. $\frac{3}{2}$. 2548. 3. 2549. 1. 2550. $\frac{1}{3}$. 2551. a) $\frac{a\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; b) $\frac{a\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$. 2552. $1-\sqrt{2}$. 2553. Es convergente solamente para
$x=k\pi$ (k es entero). 2556. Es divergente. 2557. Es divergente. 2558. Es con-
vergente. 2559. Es divergente. 2560. Es divergente. 2561. Es divergente. 2562
Es convergente. 2563. Es convergente. 2564. Es divergente. 2566. Puede ser
tanto convergente como divergente. 2567. a) Puede ser tanto convergente co-
mo divergente; b) es divergente. 2578. Es convergente. 2579. Es convergente.
2580. Es convergente. 2581. a) Es convergente; b) es divergente. 2582. Es
convergente. 2583. Es convergente. 2584. Es convergente. 2585. Es conver-
gente. 2585.1. Es convergente. 2585.2. Es convergente para cualesquiera α y
x. 2586. Es convergente. 2587. Es divergente. 2588. Es divergente. 2589. Es
convergente. 2589.1. Es convergente. 2589.2. Es convergente. 2590. Es con-
vergente. 2591.2. $n\geqslant13$. 2595. Es convergente. 2596. Es convergente. 2597.
Es convergente. 2597.1. Es convergente. 2598. Es convergente para $p>2$.
2599. Es convergente para $\frac{b-a}{d}>1$. 2600. Es convergente si $p>\frac{3}{2}$.
2601. Es convergente. 2602. Es convergente si $p+q>1$. 2603. Es conver-
gente si $q>p$. 2604. Es convergente si $\frac{p}{2}+q>1$. 2605. Es convergente
si $\alpha(q-p)>1$. 2607. Es convergente si $q>p+1$. 2608. Es convergente si
$p>0$. 2609. Es convergente si $p>0$. 2610. Es convergente si $p>\frac{1}{2}$. 2611.
Es convergente si $b\neq1$. 2612. Es convergente si $p>1$. 2613. Es divergente.
2614. Es divergente. 2614.2. Es convergente si $p+x>1$. 2616. Es conver-
gente si $x<\frac{1}{e}$. 2617. Es convergente. 2618. Es divergente. 2619. Es con-
vergente si $p>1$. 2620. Es convergente si $p>1$, q es arbitrario y si $p=1$,
$q>1$. 2620.1. Es divergente. 2620.2. Es convergente. 2620.3. Es convergen-
te. 2621. Es divergente. 2623. 1,20. 2626. Es convergente si $\alpha>\frac{1}{2}$. 2627.

Es convergente si $a=\frac{1}{2}$. 2628. Es divergente. 2629. Es convergente. 2630.
Es convergente si $a > 2$. 2631. Es convergente. 2632. Es convergente. 2633.
Es convergente. 2634. Es convergente si $c=0$, $\frac{a}{d} < -1$. 2635. Es divergente. 2636. Es convergente si $a \neq 0$. 2637. Es convergente. 2638. Es divergente. 2639. Es convergente. 2640. Es convergente si $a = \sqrt{bc}$. 2641. Es convergente si $\alpha < -1$. 2642. Es convergente si $\alpha > \frac{1}{2}$. 2643. Es convergente si $a^b > e$, $c = 0$ y si $a^c > 1$. 2644. Es convergente si $a + b > 1$. 2645. Es convergente. 2646. Es convergente. 2647. Es convergente. 2648. Es divergente. 2649. Es convergente. 2650. Es convergente.2651. Es convergente. 2652. Es convergente si $\alpha > 2$. 2653. Es convergente. 2654. Es convergente. 2655. a) $N > 100.000$; b) $N \geqslant 12$; c) $N > 4$. 2659. $\frac{2}{9}$. 2660. $1\frac{3}{7}$. 2661. ln 2. 2662. a) $\frac{3}{2}$ ln 2; b) $\frac{1}{2}$ ln 2. 2664. Es convergente. 2665. Es convergente.
2666. Es convergente. 2666.1. No se deduce. 2667. Es convergente. 2668. Es convergente. 2669. Es convergente. 2670. Es divergente. 2671. Es convergente. 2672. Es convergente. 2673. Es divergente. 2673.1. Es convergente. 2675. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 1$. 2676. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 1$. 2677. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$. 2678. Es absolutamente convergente si $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k es entero); es condicionalmente convergente si $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$. . 2679. Es condicionalmente convergente para cualquier x que no sea igual a un número entero negativo. 2680. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 1$. 2681. Es absolutamente convergente si $p > 2$; es condicionalmente convergente si $1 < p \leqslant 2$. 2682. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$. 2683. Es condicionalmente convergente. 2684. Es absolutamente convergente. 2685. Es divergente. 2686. Es condicionalmente convergente. 2687. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$. 2688. Es divergente. 2689. Es absolutamente convergente si $p > 2$; es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 2$. 2690. Es convergente. 2691. Es divergente. 2692. Es absolutamente convergente si $q > p + 1$; es condicionalmente convergente si $p < q \leqslant p + 1$. 2693. Es absolutamente convergente si $p > 1$, $q > 1$; es condicionalmente convergente si $0 < p = q \leqslant 1$. 2694. Es absolutamente convergente si $p > 1$; es condicionalmente convergente si $p = 1$.

dicionalmente convergente si $p = 1$. 2695. Es absolutamente convergente si
$p > 1$; es condicionalmente convergente si $p = 1$. 2696. Es absolutamente con-
vergente si $p > 1$, $q > 1$; es condicionalmente convergente si $0 < p = q \leqslant 1$.
2698. a) $p > 1$; b) $0 < p \leqslant 1$. 2698.1. a) Es convergente; b) es convergente;
c) es convergente. 2699. a) $q > p + 1$; b) $p < q \leqslant p + 1$. 2700. Es absoluta-
mente convergente si $m \geqslant 0$; es condicionalmente convergente si $-1 < m <$
< 0. 2703.1. a) $n \geqslant 1.000.000$; b) $n \geqslant 1{,}32 \cdot 10^{10}$. 2706. a) Es divergente;
b) puede ser tanto convergente como divergente. 2707. $\frac{2}{3}$. 2708. $\frac{3}{4}$.
2709. $-\frac{2}{7}$. 2710. $\frac{1+y}{1-xy}$. 2716. Es absolutamente convergente si $|x| > 1$. 2717.
Es absolutamente convergente si $x > 0$; es condicionalmente convergente si
$x = 0$. 2718. Es absolutamente convergente si $x > -\frac{1}{3}$ y si $x < -1$. 2719.
Es absolutamente convergente si $|x| \neq 1$ y es condicionalmente convergente
si $x = -1$. 2720. Es absolutamente convergente para $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$
y para $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$. 2721. Es absolutamente convergente para
$|x - \pi k| \leqslant \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$). 2722. Es absolutamente convergente
si $p > 1$ y $x \neq k$ ($k = -1, -2, \ldots$) y es condicionalmente convergente si $0 <$
$< p \leqslant 1$, $x \neq k$. 2723. Es absolutamente convergente si $q > p + 1$ y es con-
dicionalmente convergente si $p < q \leqslant p + 1$. 2724. Es absolutamente conver-
gente para $|x| < 1$. 2725. Es absolutamente convergente para $|x| < 1$. 2726.
Es absolutamente convergente para $|x| \neq 1$. 2727. Es absolutamente conver-
gente para $x \neq -1$. 2728. Es absolutamente convergente para $x > 0$. 2729.
Es absolutamente convergente para $0 < |x| < +\infty$ si $|a| > 1$; es divergente
si $|a| \leqslant 1$ o si $x = 0$. 2730. Es absolutamente convergente para $x = 2$ y para
$x > e$. 2731. Es absolutamente convergente para $x > 1$. 2732. Es convergente
si $0 < \min(x, y) < 1$. 2733. Es absolutamente convergente para $|x| < 1$,
$0 \leqslant y < +\infty$ y para $|x| > 1$, $y > |x|$; es condicionalmente convergente para
$x = -1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. 2734. Es absolutamente convergente para max ($|x|$,
$|y|$) < 1. 2735. Es absolutamente convergente para: 1) $0 \leqslant x < 1$, $-\infty <$
$< y < +\infty$; 2) $x = 1$, $y > 1$ y 3) $x > 1$, $y > 2$. 2736. Es absolutamente con-
vergente para $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, donde k es un número entero. 2738.
$\frac{1}{2} < |x| < 2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. 2739. a) Es absolutamente convergente
para $x \geqslant 0$, es condicionalmente convergente para $-1 < x < 0$; b) es absolu-
tamente convergente para $p + x > 1$ y para $x = 0, 1, 2, \ldots$, es condicionalmen-
te convergente para $0 < p + x \leqslant 1$; c) es absolutamente convergente para:
1) $|x| < 1$, y es arbitrario; 2) $x = \pm 1$. $y > \frac{1}{2}$; ; 3) x es arbitrario, $y = 0$,
1, 2, ...; es condicionalmente convergente para $x = 1$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$. 2743.

para $\epsilon = 0{,}001$ y $x = \sqrt[m]{0{,}1}$, $N \geqslant 3m$. No. 2744. $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 2745. $n \geqslant 26$. 2746. a) es uniformemente convergente; b) converge no uniformemente. 2747. Converge uniformemente. 2748. Converge no uniformemente. 2749. Converge uniformemente. 2750. Converge uniformemente. 2751. a) Converge uniformemente; b) converge no uniformemente; c) converge uniformemente. 2752. a) Converge no uniformemente; b) converge uniformemente. 2753. Converge uniformemente. 2754. Converge no uniformemente. 2755. a) Converge uniformemente; b) converge no uniformemente. 2756. a) Converge no uniformemente; b) converge uniformemente. 2757. Converge no uniformemente. 2758. a) Converge uniformemente; b) converge no uniformemente. 2759. Converge uniformemente. 2760. a) Converge uniformemente; converge no uniformemente. 2761. Converge uniformemente. 2762. Converge uniformemente. 2763. Converge no uniformemente. 2767. a) Converge uniformemente; b) converge no uniformemente. 2768. Converge uniformemente. 2768.1. Converge no uniformemente. 2769. Converge no uniformemente. 2770. Converge uniformemente. 2771. Converge no uniformemente. 2772. Converge uniformemente. 2773. a) Converge no uniformemente; b) converge uniformemente. 2775. a) Converge uniformemente; b) converge no uniformemente. 2776. Converge no uniformemente. 2777. Converge uniformemente. 2778. Converge uniformemente. 2779. Converge uniformemente. 2780. Converge uniformemente. 2781. Converge uniformemente. 2782. Converge uniformemente. 2783. Puede. 2785. No necesariamente. 2795. a) Existe y es continua para $|x| < 1$; b) existe y es continua para $|x| < +\infty$; c) existe para $|x| < +\infty$, es discontinua para $x = 0$. 2799. a) Existe y es derivable para $x \neq -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; b) existe para $|x| < +\infty$, es derivable en todos los puntos, a excepción de $x = 0$. 2802. a) α es arbitrario; b) $\alpha < 1$; c) $\alpha < 2$. 2805. No. 2806. $\frac{1}{2}\ln 2$. 2807. 1. 2808. 1. 2808.1. $\frac{\pi^2}{6}$. 2809. Es lícita. 2810. Si. 2812. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = -1$ es absolutamente convergente si $p > 1$, y es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 1$; para $x = 1$ es absolutamente convergente si $p > 1$, y es divergente si $p \leqslant 1$. 2813. $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Para $x = -\frac{4}{3}$ es condicionalmente convergente; para $x = -\frac{2}{3}$ es divergente. 2814. $R = 4$; $(-4, 4)$. Para $x = \pm 4$ es divergente. 2815. $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$. 2816. $R = \frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Para $x = \pm\frac{1}{e}$ es divergente. 2817. $R = +\infty$; $(-\infty + \infty)$. 2818. $R = 2$; $(-1, 3)$. Para $x = -1$ es absolutamente convergente si $p > 2$, y es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 2$; para $x = 3$ es absolutamente convergente si $p > 2$, y es divergente si $p \leqslant 2$. 2819. $R = 2^p$; $(-2^p, 2^p)$. Para $x = -2^p$ es absolutamente convergente si $p > 2$, y es divergente si $p \leqslant 2$; para $x = 2^p$ es absolutamente convergente si $p > 2$, y es condicionalmente convergente si $0 < p \leqslant 2$. 2820. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = -1$

es absolutamente convergente si $m \geqslant 0$, y es divergente si $m < 0$; para $x = 1$ es absolutamente convergente si $m \geqslant 0$, y es condicionalmente convergente si $-1 < m < 0$. 2821. $R = \min\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)$; $(-R, R)$. Para $x = -R$ es condicionalmente convergente si $a \geqslant b$, y es absolutamente convergente si $a < b$; para $x = R$ es divergente si $a \geqslant b$ y es absolutamente convergente si $a < b$. 2822. $R = \max(a, b)$; $(-R, R)$. Para $x = \pm R$ es divergente. 2823. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = \mp 1$ es absolutamente convergente si $a > 1$, y es divergente si $a \leqslant 1$. 2824. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = \pm 1$ es absolutamente convergente. 2825. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = -1$ es condicionalmente convergente; para $x = 1$ es divergente. 2826. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = -1$ es divergente; para $x = 1$ es condicionalmente convergente. 2827. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = \pm 1$ es divergente. 2828. $R = \frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Para $x = \pm\frac{1}{4}$ es divergente. 2829. $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Para $x = \pm\frac{1}{3}$ es divergente. 2830. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = \pm 1$ es absolutamente convergente. 2831. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = \pm 1$ es condicionalmente convergente. 2831.1. Para $0 < x < 2$ es absolutamente convergente; para $x = 2$ es condicionalmente convergente. 2831.2. Es convergente solamente para $x = 0$. 2832. $R = 1$; $(-1, 1)$. Para $x = -1$ es absolutamente convergente si $\gamma - \alpha - \beta > 0$ y es condicionalmente convergente si $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$; para $x = 1$ es absolutamente convergente si $\gamma - \alpha - \beta > 0$, y es divergente si $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$. 2833. $x > 0$. 2834. $|x| > \frac{1}{2}$. 2835. $0 < |x| < +\infty$. 2836. $x > -1$. 2837. $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, donde k es entero. 2838. $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$. 2839. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x| < |a|)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b| < |a-b|)$. в) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x| > |a|)$. 2840. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ $(0 < x \leqslant 2)$; $\ln 2$. 2841. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x| < +\infty)$. 2842. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x| < +\infty)$. 2843. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x| < +\infty)$. 2844. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ $(|x| < +\infty)$. 2845. $\mu x + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{5!} x^5 + \ldots$ $(|x| < 1)$. 2846. $1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)}{4!} x^4 - \ldots$ $(|x| < 1)$. 2847. $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + \ldots$ $(0 < x < 2)$. 2848. $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \ldots\right)$ $(|x| < 1)$.

2849. $\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \dots$ $(|h| < +\infty)$;
$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \dots$ $(|h| < +\infty)$.

2850. a) $(-2, 2)$; b) $(3, 7)$. 2850.1. No. 2851. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(|x| < +\infty)$.

2852. $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x| < +\infty)$. 2853. $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(|x| < +\infty)$. 2854. $\sum_{n=10}^{\infty}x^n$ $(|x| < 1)$. 2855. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x| < 1)$. 2856. $x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\right)$. 2857. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$.

2858. $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$ $\left(|x| < \frac{1}{2}\right)$. 2859. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n$ $(|x| < 1)$.

2860. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x| < 1)$. 2861. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, donde $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (número de Fibonacci).

2862. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$ $(|x| < 1)$. 2862.1. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$, donde $c_n = 1$, si $n = 4k$; $c_n = -1$, si $n = 2k+1$; $c_n = 0$, si $n = 2k+2$ ó $n = 2k+3$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. $f^{(1000)}(0) = 1000!$. 2863. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$ $(|x| < 1)$.

2864. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin na$ $(|x| < 1)$. 2865. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n \operatorname{sh} na$ $(|x| < e^{-|a|})$.

2866. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ $(|x| < 1)$. 2867. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n}x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$. 2868. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos na}{n!}x^n$ $(|x| < +\infty)$. 2869. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$; $\frac{\pi}{4}$. 2870. $x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$. 2871. $x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$ $(|x| \leqslant 1)$. 2872. $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos na}{n}x^n$ $(|x| \leqslant 1)$. 2873. a) $x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(-1 < x < 1)$; c) $\operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ $\left(-\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}\right)$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\}$ $(|x| < \sqrt{2})$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ $(|x| \leqslant 1)$; f) $2|x|\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant x \leqslant 0$; g) $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}$ $(|x| \leqslant 1)$; h) $-1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$. 2874. a) $e^{x^2}\left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} \times (2x)^{n-4} + \dots\right]$; b) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} \times a^{n-2}x^2 + \dots\right]$; c) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x^2)^n}\left[x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^{n-5} - \dots\right]$. 2875. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}$ $(-2 \leqslant x \leqslant 0)$. 2876. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ $(|x| > 1)$. 2877. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ $(x > 0)$.

2878. $\frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$ $\left(x > -\frac{1}{2}\right)$. 2881. $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \dots$ $(|x| < 1)$. 2682. $1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$ $(|x| < +\infty)$.

2883. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n$ $(|x| < +\infty)$, donde $0! = 1$, $(-1)! = \infty$, $(-2)! = \infty$ etc. 2884. $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1 \leqslant x < 1)$. 2885. $x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$. 2886. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x| < +\infty)$. 2887. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x| < +\infty)$. 2888. $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1} \times\right.$

$\times\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n\Big\}$ $(-1<x<1)$. 2889. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}$ $(|x|\leqslant 1)$. 2890. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$ $(|x|\leqslant 1)$. 2891. $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. 2892. $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$.

2893. $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\ldots(|x|<\pi)$. 2894. $E_0=1$. $\sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\times\frac{E_{n-k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}\right\}=0$. 2895. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\,x^n$ $(|x|<1)$, donde $P_0(t)=1$;

$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\ldots\right](n\geqslant 1)$

(polinomios de Legendre).

2896. $\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, donde $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. 2897. a) $R\geqslant\min(R_1,\ R_2)$; b) $R\geqslant R_1R_2$.

2901. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$ $(|x|<+\infty)$. 2902. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x|\leqslant 1)$.

2903. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty)$. 2904. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(|x|\leqslant 1)$.

2905. $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}-\ldots(|x|<1)$. 2906. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. 2907. $\operatorname{arctg}x$ $(|x|\leqslant 1)$. 2908. $\operatorname{ch}x$ $(|x|<+\infty)$. 2909. $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$ $(|x|\leqslant 1)$.

2910. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(-1\leqslant x<1)$. 2911. $\frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$. 2912. $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(|x|<1)$.

2913. $\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. 2916. $R=2$; $(x-1)^2+(y-1)^2<4$. 2917. $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2<\frac{1}{2}$. 2918. $R=1$; $x^2+y^2<1$. 2919. $R=1$; $x^2+y^2<1$. 2920. $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 2921. 2,080. 2922. a) $0{,}87606=\operatorname{arc}50°11'40''$; b) 1,99527; c) 0,60653; d) 0,22314 2923. 0,30902. 2924. 0,999848. 2925. 0,158. 2926. 2,718282. 2927. 0,1823. 2928. 3,1416. 2929. 3,142. 2930. 3,141592654. 2931. $\ln 2=0{,}69315$; $\ln 3=1{,}09861$. 2932. a) 0,747; b) 2,835; c) 1,605; d) 0,905; e) 1,057; f) 0,119; g) 0,337; h) 0,927; i) 8,041; j) 0,488; k) 0,507; l) 0,783. 2933. 3,82. 2934. 4,84. 2935. 20,02 m. 2936. $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. 2937. La serie de Fourier coincide con el polinomio $P_n(x)$.

2938. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$. 2939. $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$.

2940. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. 2941. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 2942. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

2943. $\frac{(a-b)\pi}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

2944. $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. 2945. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$.

2946. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$. 2947. $\frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2+a^2}$.

2948. $2\operatorname{sh}ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{nx}{h}-\pi n\sin\frac{nx}{h}}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$. 2949. $a+l+\frac{2l}{\pi}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)(a<x<a+2l)$. 2950. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. 2951. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. 2952. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\times\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. 2953. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$. 2954. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

2955. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$ (x no es entero). 2956. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 2957. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. 2958. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$. 2959. $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\cos nx$.

2960. $\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right]\times\cos(8k+4)x\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m-1}\times\sin(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]\cos 8kx\right\}$. 2961. a) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

b) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1) x}{(2k+1)^3}$ $(0 \leqslant x < \pi)$; c) $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} -$
$- 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ $(0 < x < 2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$;
$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4 = \frac{1}{\pi} \pi^4 + 8\pi^2 \times$
$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$; $\frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$.
2964. $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$. **2965.** $\frac{1}{2^m} C_{2m}^m +$
$+ \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{m-k} \cos 2kx$. **2966.** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ $(|q| < 1)$. **2967.** $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$
$(|q| < 1)$. **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$. **2969.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$. **2970.** $-\ln 2 -$
$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n}$. **2972.** $-2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1) x}{2k+1}$.
2973. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1) x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} +$
$+ \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}$; $y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} +$
$+ \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}$. **2975.** $f(-x) = f(x)$; $f(\pi - x) = -f(x)$.
2976. $f(-x) = -f(x)$; $f(\pi - x) = f(x)$. **2977.** a) $- \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{8}{\pi} \times \right.\right.$
$\left.\left. \times \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \cos (2k+1) x \right\} \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3} \right] \times \right.$
$\left. \times \sin (2k+1) x \right\} \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$. **2978.** $a_{2n} = b_{2n} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
2979. $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
2980. a) $a_n = 0$, $b_{2k-1} = 0$; b) $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$.
2981. $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = -b_n$. **2982.** $\alpha_n = -a_n$, $\beta_n = b_n$.
2983. $\overline{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh$, $\overline{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$. **2984.** $A_0 = a_0$,

$A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}$, $B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **2985.** $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$;
$B_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **2986.** $\frac{1}{2}$. **2987.** $\frac{1}{4}$. **2988.** $2 \ln 2 - 1$. **2989.** $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m} \times$
$\times \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \right)$. **2991.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1. **2994.** $2(1 - \ln 2)$.
2995. $2e$. **2996.** $3e^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3} - 3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$. **2999.** $\frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$.
3000. $\frac{1}{6}(4 \ln 2 - 1)$. **3001.** $e^x (\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_0)$, donde los coeficientes α_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ se determinan por la igualdad $P(n) = \alpha_m n(n-1)\ldots$
$\ldots(n - m + 1) + \alpha_{m-1} n(n-1)\ldots(n - m + 2) + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0$. **3002.** $e^{\frac{x}{2}} \times$
$\times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right)$. **3003.** $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} - \frac{1}{x}$. **3004.** $\left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \cos x - \frac{x}{2} \times$
$\times \sin x$. **3005.** $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right)$, si $x \geqslant 0$; $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \right.$
$\left. - \cos \sqrt{|x|} \right)$, si $x < 0$. **3006.** $\ln \frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x \operatorname{arctg} x - \ln (1 + x^2)$
$(|x| \leqslant 1)$. **3008.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. **3009.** $(1 - x)^{-\frac{a}{d}} - 1$
$(|x| < 1)$. **3010.** $\left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$
$(|x| < 1)$. **3013.** $(1 + 2x^2) e^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3017. $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$. **3019.** $-\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$ $(0 < x < 2\pi)$.
3020. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x + \alpha}{2}}{\sin \frac{x - \alpha}{2}} \right|$. **3021.** $\frac{\pi}{4}$, si $0 < x < 2\alpha$; 0, si $\alpha < x < 2\pi - 2\alpha$;
$-\frac{\pi}{4}$, si $2\pi - 2\alpha < x < 2\pi$. **3022.** $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x$ $(|x| < \pi)$. **3023.** $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) -$
$- \frac{x}{2} \sin x$ $(|x| < \pi)$. **3024.** $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x|$ $(|x| \leqslant \pi)$. **3025.** $\frac{x}{2}(1 + \cos x) -$
$- \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$ $(|x| < \pi)$. **3026.** $e^{\cos x} \cos (\sin x)$ $(|x| < +\infty)$. **3027.** $x = i\pi$,
$y = j\pi$ $(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2$ $(|x| \leqslant 1)$. **3029.** $\frac{4}{4 - x} +$
$+ \frac{4\sqrt{x}}{(4 - x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}$, si $x \geqslant 0$; $\frac{4}{4 - x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4 - x)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4 - x}}{2}$,
si $x < 0$. **3030.** $\frac{1}{x - 1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** a) $\frac{x}{1 - x}$; b) $\frac{1}{1 - x}$. **3033.** a) $\frac{x^2}{(1 - x)^3}$;

b) $\frac{x}{(x-1)^2}$. 3034. 1. 3035. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$. 3036. $\frac{\pi^2}{12}$.

3037. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}$. 3038. $2-\frac{\pi^2}{6}$. 3039. $\frac{1}{24}$ 3040. $\frac{\pi^2}{12}$. 3041. $F(k)=$

$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}$. 3042. $E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$.

3043. $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots\right]$, donde ϵ es la excentricidad de la elipse.

3047. $\frac{2\pi a^n}{n!}$ 3048. $\ln(1+\alpha)$ si $|\alpha|<1$ y $\frac{1}{\alpha^2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ si $|\alpha|>1$.

3049. 0 si $|\alpha|\leqslant 1$ y $\pi\ln\alpha^2$ si $|\alpha|>1$. 3050. $2\cdot10^{-6}$. 3061. $\frac{1}{4}$. 3062.

2. 3063. $\frac{3}{7}$. 3064. $a^{-\ln 2}$. 3065. a) No; b) si; c) si; d) si. 3066. Diverge hacia cero. 3067. Es convergente. 3068. Es convergente si $p>1$. 3069. Diverge hacia cero. 3070. Es convergente para cualquier p. 3071. Es convergente si $a_1=a$. 3072. Es convergente si $\sum_{i=1}^{p}a_i=\sum_{i=1}^{p}b_i$. 3073. Diverge hacia cero.

3074. Es convergente. 3075. Es convergente. 3076. Es convergente. 3077. Es convergente para cualquier x. 3078. Es convergente para cualquier x. 3079. Es convergente para $|x|<1$. 3080. Es convergente para $|x|<2$. 3081. Es convergente para $|x|>e$. 3082. Es convergente para cualquier x. 3083. Es convergente para $|x|<1$, p y q arbitrarios, y para $x=\pm1$, $p>1$, $q>\frac{1}{2}$.

3084. Es convergente para cualesquiera x y p. 3085. Es divergente. 3088. Es condicionalmente convergente. 3089. Es divergente. 3090. Es absolutamente convergente si $p>1$; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$. 3091.

Es divergente. 3092. Es divergente. 3093. Es divergente. 3094. Es condicionalmente convergente. 3095. Es condicionalmente convergente. 3096. Es divergente. 3097. Es absolutamente convergente si $\alpha>1$; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.

3109. $F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$, $|f_n'(x)|<c_n$ $(n=1,2,\ldots)$, donde $\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$. 3111. $157{,}970+\theta\cdot0{,}0004$ $(0<\theta<1)$.

3112. $10^{2566}\cdot7{,}7\cdot\left(1+\frac{\theta}{12000}\right)$ $(|\theta|<1)$. 3113. $0{,}0798\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. 3114. $10^{11}\times1{,}378\cdot\left(1+\frac{\theta}{288}\right)$ $(|\theta|\leqslant1)$. 3115. $10^{42}\cdot4{,}792\cdot\left(1+\frac{\theta}{120}\right)$ $(|\theta|\leqslant1)$. 3116. $0{,}124\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. 3117. $0{,}355\cdot\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$ $(|\theta|<1)$. 3118. $(2n-1)!!=\sqrt{2}(2n)^ne^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ $(|\theta_n|<1)$. 3119. $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}e^{\frac{\theta_n}{8n}}$ $(|\theta_n|<1)$. 3120. a) 1; b) e; c) $\frac{e}{2}$; d) 1. 3121. $P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3$; $P_3(-1)\approx3{,}43$; $P_3(1)=-1{,}57$; $P_3(6)\approx8{,}43$. 3122. $y=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2$. 3123. $y=0{,}808+0{,}193x-0{,}00101x^2$. 3124. $\sin x^\circ\approx\frac{5x}{288}\left[1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right]$; $\sin20^\circ\approx0{,}341$; $\sin40^\circ\approx0{,}645$; $\sin80^\circ\approx0{,}994$.

3125. $P(x)=\frac{1}{3}(7x^2-4x^4)$. 3126. $7\frac{1}{3}$.

3127. $B_n(x)=x$; $B_n(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$;

$$B_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n^2}x.$$

3128. $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}l\right)C_n^i\frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{l^n}$, donde $l=b-a$.

3129. $B_n(x)=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$ 3130. $B_{2n}(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\times\sum_{i=1}^{n}iC_{2n}^{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$. 3131. $B_n(x)=e^{ka}\left[1+(e^{\frac{kl}{n}}-1)\frac{x-a}{l}\right]^n$, donde $l=b-a$.

3132. $B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$,

donde $i^2=-1$. 3135. $\sigma_{2n-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

SEGUNDA PARTE

Capítulo VI

3136. El semiplano $y\geqslant0$. 3137. $|x|\leqslant1$; $|y|\geqslant1$. 3138. $x^2+y^2\leqslant1$. 3139. La parte exterior del círculo $x^2+y^2>1$. 3140. El anillo $1\leqslant x^2+y^2\leqslant4$. 3141. La lúnula $x\leqslant x^2+y^2\leqslant2x$. 3142. $-1\leqslant x^2+y\leqslant1$. 3143. El semiplano $x+y<0$. 3144. El par de ángulos opuestos $|y|\leqslant|x|$ $(x\neq0)$. 3145. El par de ángulos opuestos obtusos, limitados por las rectas $y=0$ e $y=-2x$, incluyendo la frontera sin el vértice común O(0, 0).

3146. El triángulo rectilíneo, limitado por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = -x$ y la recta $y = 2$, excluyendo el vértice $0(0, 0)$. 3147. La familia de anillos concéntricos $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi(2k + 1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. 3148. La parte exterior del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, incluyendo la frontera excepto el vértice. 3149. El conjunto de cuatro octantes del espacio. 3150. La parte interior del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. 3151. Rectas paralelas. 3152. Circunferencias concéntricas. 3153. La familia de hipérbolas equiláteras con las asíntotas comunes $y = \pm x$. 3154. Rectas paralelas. 3155. Un haz de rectas con el vértice en el origen de coordenadas, a excepción del vértice. 3156. Una familia de elipses semejantes. 3157. Un conjunto de hipérbolas equiláteras, que se aproximan asintóticamente a los ejes de coordenadas y están situadas en el I y III cuadrantes. 3158. Una familia de líneas poligonales de dos lados, cuyos vértices están situados en el eje Oy. 3159. El I y III cuadrantes para $z = 0$; una familia de poligonales de dos lados, cuyos vértices están situados en la recta $x + y = 0$, y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, para $z > 0$. 3159.1. Las curvas de nivel son los lados de los ángulos paralelos a las direcciones positivas de los ejes de coordenadas Ox y Oy, y con los vértices en la recta $y = x$. 3159.2. La familia de los contornos de los cuadrados con el centro común $0(0, 0)$, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas Ox y Oy para $z > 0$; el punto $0(0, 0)$ para $z = 0$. 3159.3. Rectas paralelas al eje Ox, si $z < 0$; los lados de los ángulos, paralelos al eje de coordenadas Ox y al semieje positivo Oy, con los vértices en la parábola $y = x^2$, si $z > 0$; el semieje positivo Oy, si $z = 0$. 3160. Un haz de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (sin incluir este origen) y que son ortogonales al eje Ox. 3161. Las curvas $y = \dfrac{C}{\ln x}$. 3162. Las curvas $y = \dfrac{C + x}{\ln x}$. 3163. Una familia de circunferencias con los centros en el eje Ox, que son ortogonales a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. 3164. Una familia de circunferencias que son ortogonales al eje Oy y que pasan por los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$, a excepción de estos últimos. 3165. Las rectas $x = m\pi$ e $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, para $z = 0$; el sistema de cuadrados $m\pi < x < (m + 1)\pi$, $n\pi < y < (n + 1)\pi$, donde $(-1)^{m+n} = z$, para $z = -1$ o $z = 1$. 3166. Una familia de planos paralelos. 3167. Una familia de esferas concéntricas con centro en el origen de coordenadas. 3168. Una familia de hiperboloides de dos hojas para $u < 0$; una familia de hiperboloides de una hoja para $u > 0$; un cono para $u = 0$. 3169. Una familia de cilindros elípticos, cuyo eje común es la recta $x + y = 0$, $z = 0$. 3170. Una familia de esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ para $u = 0$; una familia de capas esféricas $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n + 1)$, donde $(-1)^n = u$, para $u = -1$ o $u = 1$. 3171. Una superficie cilíndrica con la directriz $z = f(y)$, $x = 0$, cuyas generatrices son paralelas a la recta $y = ax$, $z = 0$. 3172. La superficie de rotación de la curva $z = f(x)$, $y = 0$, en torno del eje Ox. 3173. Superficie cónica con vértice en el origen de coordenadas y con la directriz: $x = 1$, $z = f(y)$. 3174. Conoide con la directriz: $x = 1$, $z = f(y)$, cuyas generatrices son paralelas al plano Oxy. 3176. $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = f(x, y)$. 3177. $\sqrt{1 + x^2}$. 3178. $f(t) = 2t + t^2$; $z = x - 1 + \sqrt{y}$

$(x > 0)$. 3179. $f(x) = x^2 - x$; $z = 2y + (x - y)^2$. 3180. $f(x, y) = x^2\dfrac{1 - y}{1 + y}$.

3183.1. No. 3183.2. 0; no. 3184. a) 0, 1; b) $\dfrac{1}{2}$, 1; c) 0, 1; d) 0, 1; e) 1, ∞.

3185. 0. 3186. 0. 3187. a. 3188. 0. 3189. 0. 3190. 1. 3191. e. 3192. $\ln 2$. 3193. a) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$; b) $\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{3\pi}{4}$ y $\dfrac{5\pi}{4} < \varphi < \dfrac{7\pi}{4}$. 3194. Puntos de discontinuidad: $x = 0$, $y = 0$. 3195. Todos los puntos de la recta $x + y = 0$. 3196. $0(0, 0)$ es un punto de discontinuidad infinita; los puntos de la recta $x + y = 0$ $(x \neq 0)$ son de discontinuidad evitable. 3197. Los puntos situados en los ejes de coordenadas. 3198. El conjunto de puntos de las rectas $x = m\pi$ e $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 3199. Los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. 3200. Los puntos de los planos coordenados: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. 3201. (a, b, c). 3203.1. Es uniformemente continua. 3203.2. Es uniformemente continua. 3203.3. Es continua, pero no uniformemente. 3203.4. La función es continua en E, pero no uniformemente. 3212. $f'_x(x, 1) = 1$. 3212.1. $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$; la función no es diferenciable en el punto $0(0, 0)$. 3212.2. La función no es diferenciable en el punto $0(0, 0)$. 3212.3. La función es diferenciable en el punto $0(0, 0)$.

3213. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -16xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$. 3214. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1 - \dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}$. 3215. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{6x}{y^4}$. 3216. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$. 3217. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x\cos(x + y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x + y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\sin(x + y)$. 3218. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{2x\sin x^2}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\cos x^2}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$. 3219. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{8x^2}{y^2}\sin\dfrac{x^2}{y}\sec^3\dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{2x}{y^2}\sec^2\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{4x^3}{y^3}\sin\dfrac{x^2}{y}\sec^3\dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2}{y^3}\sec^2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{2x^4}{y^4}\sin\dfrac{x^2}{y}\sec^3\dfrac{x^2}{y}$. 3220. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y - 1)x^{y-2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$ $(x > 0)$. 3221. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{x + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{(x + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{2y}{(x + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}$. 3222. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. 3223. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{1 + y^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy\neq 1)$. 3224. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y\neq 0)$. 3225. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. 3226. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\times$ $\times\ln\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\times$ $\times\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}>0\right)$. 3227. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^2}\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u\ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{yu\ln x}{z^4}(2z+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}$ $(xz\neq 0)$. 3228. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^z}{x}u$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}u\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=y^z u\ln x\ln y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zy^{z-2}u(z-1+$ $+zy^z\ln x)\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=y^z u(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{y^z u\ln y}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=y^{z-1}u\ln x[1+z\ln y\,(1+y^z\ln x)]$ $(x>0,\ y>0)$. 3230.1. $f''_{xy}(0,0)$ no existe. 3235. $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$, $d^2u=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\,dx^2+2mn\,xy\,dx\,dy+n(n-1)x^2\,dy^2]$. 3236. $du=$ $=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$, $d^2u=-\frac{2}{y^3}dy(y\,dx-x\,dy)$. 3237. $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2u=$ $=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. 3233. $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$, $d^2u=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.
3239. $du=e^{xy}(y\,dx+x\,dy)$. $d^2u=e^{xy}[y^2\,dx^2+2(1+xy)\,dx\,dy+x^2\,dy^2]$.
3240. $du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, $d^2u=2(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$.
3241. $du=\frac{(x^2+y^2)\,dz-2z(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}$, $d^2u=\frac{2z[(3x^2-y^2)\,dx^2+\ldots}{(x^2+y^2)^3}\ldots\rightarrow$ $\rightarrow\ldots\frac{+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2]-4(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)\,dz}{(x^2+y^2)^3}$. 3242. $dx-dy$, $-2(dx-dy)(dy+dz)$. 3244. a) $1+mx+ny$; b) xy. c) $x+y$. 3245. a) 108,972; b) 1,055; c) 2,95; d) 0,502; e) 0,97. 3246. La diagonal disminuirá 3 mm aproximadamente; el área disminuirá 140 cm^2 aproximadamente. 3247. Hay que disminuir 1,7 mm. 3249. $\Delta\approx 10{,}2\ m^3$; $\delta\approx 13\%$. 3250. $\Delta\approx 7{,}6$ m. 3251. $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ no están acotadas en un entorno del punto $(0,0)$. 3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=-16$. 3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=0$. 3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$.
3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$. 3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$. 3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}=$

$=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, donde $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. 3262. $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial x^q}=p!\,q!$

3263. $\frac{2(-1)^m(m+n-1)!\,(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. 3264. $e^{x+y}[x^2+y^2+2(mx+ny)+$ $+m(m-1)+n(n-1)]$. 3265. $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$. 3266. $\sin\frac{n\pi}{2}$.
3267. $F(t)=f'(t)+3tf''(t)+t^2f'''(t)$. 3268. $d^4u=24(dx^4-2dx^3dy-2dx\,dy^3+$ $+dy^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24$.
3269. $d^3u=6(dx^3-3dx^2\,dy+3dx\,dy^2+dy^3)$. 3270. $d^3u=-8(x\,dx+y\,dy)^3\times$ $\times\cos(x^2+y^2)-12(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)$. 3271. $d^{10}u=$ $=-\frac{9!\,(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$. 3272. $d^6u=-(dx^6-15dx^4\,dy^2+15dx^2\,dy^4-dy^6)\times$ $\times\cos x\operatorname{ch} y-2dx\,dy(3dx^4-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin x\operatorname{sh} y$. 3273. $d^3u=6\,dx\,dy\,dz$.
3274. $d^4u=2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right)$. 3275. $d^nu=e^{ax+by}(a\,dx+b\,dy)^n$. 3276. $d^nu=$ $=\sum_{k=0}^{n}C_n^kX^{(n-k)}(x)\,Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^k$. 3277. $d^nu=f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n$.
3278. $d^nu=e^{ax+by+cz}(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$. 3280. a) $Au=-u$, $A^2u=u$; b) $Au=1$, $A^2u=0$. 3281 a) $\Delta u=0$; b) $\Delta u=0$. 3282. a) $\Delta_1 u=9[(x^2-yz)^2+$ $+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2]$, $\Delta_2 u=6(x+y+z)$; b) $\Delta_1 u=\frac{1}{r^4}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u=0$. 3283. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+$ $+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2)$.

3284. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-$ $-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$. 3285. $\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=f'_1+yf'_2+yzf'_3$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+$ $+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=xyf''_{13}+$ $+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3$. 3286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f''_{11}+$ $+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2$. 3287. $\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+$ $+z^2)f''_{22}+6f'_2$. 3288. $du=f'(t)(dx+dy)$; $d^2u=f''(t)(dx+dy)^2$. 3289. $du=$ $=f'(t)\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$; $d^2u=f''(t)\frac{(x\,dy-y\,dx)^2}{x^4}-2f'(t)\frac{dx(x\,dy-y\,dx)}{x^3}$.
3290. $du=f'\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2u=f''\cdot\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
3291. $du=f'(t)\,dt$, $d^2u=f''(t)\,dt^2+f'(t)\,d^2t$, donde $dt=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$ y $d^2t=2(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$. 3292. $du=2f'\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$;

$d^2u = 4f''\cdot(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'\cdot(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3293.** $du = af'_1\,dx + bf'_2\,dy$, $d^2u = a^2f''_{11}\,dx^2 + 2abf''_{12}\,dx\,dy + b^2f''_{22}\,dy^2$. **3294.** $du = f'_1\cdot(dx + dy) + f'_2\cdot(dx - dy)$; $d^2u = f''_{11}\cdot(dx + dy)^2 + 2f''_{12}\cdot(dx^2 - dy^2) + f''_{22}\cdot(dx - dy)^2$. **3295.** $du = f'_1\cdot(y\,dx + x\,dy) + f'_2\cdot\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$; $d^2u = f''_{11}\cdot(y\,dx + x\,dy)^2 + 2f''_{12}\cdot\dfrac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} + f''_{22}\cdot\dfrac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f'_1\cdot dx\,dy - 2f'_2\cdot\dfrac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{y^3}$. **3296.** $du = f'_1\cdot(dx + dy) + f'_2\cdot dz$; $d^2u = f''_{11}\cdot(dx + dy)^2 + 2f''_{12}\cdot(dx + dy)\,dz + f''_{22}\cdot dz^2$. **3297.** $du = f'_1\cdot(dx + dy + dz) + 2f'_2\cdot(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$; $d^2u = f''_{11}\cdot(dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12}\cdot(dx + dy + dz)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + 4f''_{22}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'_2\cdot(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3298.** $du = f'_1\cdot\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + f'_2\cdot\dfrac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$;

$$d^2u = f''_{11}\cdot\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f''_{12}\cdot\frac{(y\,dx - x\,dy)(z\,dy - y\,dz)}{y^2z^2} + f''_{22}\cdot\frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^4} - 2f'_1\cdot\frac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{y^3} - 2f'_2\cdot\frac{(z\,dy - y\,dz)\,dz}{z^3}.$$

3299. $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)\,dt$; $d^2u = (f''_{11} + 4tf''_{12} + 4t^2f''_{22} + 6t^2f''_{13} + 12t^3f''_{23} + 9t^4f''_{33} + 2f'_2 + 6tf'_3)\,dt^2$. **3300.** $du = af'_1\,dx + bf'_2\,dy + cf'_3\,dz$; $d^2u = a^2f''_{11}\,dx^2 + b^2f''_{22}\,dy^2 + c^2f''_{33}\,dz^2 + 2abf''_{12}\,dx\,dy + 2acf''_{13}\,dx\,dz + 2bcf''_{23}\,dy\,dz$.
3301. $du = 2f'_1\cdot(x\,dx + y\,dy) + 2f'_2\cdot(x\,dx - y\,dy) + 2f'_3\cdot(y\,dx + x\,dy)$;

$$d^2u = 4f''_{11}\cdot(x\,dx + y\,dy)^2 + 4f''_{22}\cdot(x\,dx - y\,dy)^2 + 4f''_{33}\cdot(y\,dx + x\,dy)^2 + 8f''_{12}\cdot(x^2\,dx^2 - y^2\,dy^2) + 8f''_{13}\cdot(x\,dx + y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 8f''_{23}\cdot(x\,dx - y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 2f'_1\cdot(dx^2 + dy^2) + 2f'_2\cdot(dx^2 - dy^2) + 4f'_3\cdot dx\,dy.$$

3302 $d^nu = f^{(n)}(ax + by + cz)(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$. **3303.** $d^nu = \left(a\,dx\dfrac{\partial}{\partial\xi} + b\,dy\dfrac{\partial}{\partial\eta} + c\,dz\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, donde $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.
3304. $d^nu = \left[dx\left(a_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + a_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + a_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + b_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + b_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dz\left(c_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + c_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + c_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$. **3305.** $F(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$.

3316. 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$. **3332.** $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

3333. $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3334.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3335.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3336.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$. **3337.** $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3339.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$. **3340.** $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3341.** $1 - \sqrt{3}$.

3342. $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$; a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ y $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$.

3343. $\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. **3344.** $\dfrac{1}{ab}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **3345.** $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$;

$|\text{grad}\,u| = \sqrt{3}$. **3346.** $|\text{grad}\,u| = \dfrac{1}{r_0^2}$; $\cos(\widehat{\text{grad}\,u,\ x}) = -\dfrac{x_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\text{grad}\,u,\ y}) = -\dfrac{y_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\text{grad}\,u,\ z}) = -\dfrac{z_0}{r_0}$, donde $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **3347.** $\dfrac{\pi}{2}$.
3348. ≈ 3142. **3350.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma$. **3352.** $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -0{,}5$. **3353.** $u''_{xx}(x,\ 2x) = u''_{yy}(x,\ 2x) = -4/3\,x$, $u''_{xy}(x,\ 2x) = 5/3\,x$.
3354. $z = x\varphi(y) + \psi(y)$. **3355.** $z = \varphi(x) + \psi(y)$. **3356.** $z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \ldots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. **3357.** $u = \varphi(x,\ y) + \psi(x,\ z) + \chi(y,\ z)$. **3358.** $u = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$. **3359.** $z = 1 + xy + y^2$. **3360.** $z = x + y^2 + 0{,}5xy(x + y)$.
3362. Los ceros de la función $f(x)$ no pueden llenar completamente un intervalo $(\alpha,\ \beta) \subset (a,\ b)$. **3363.** El conjunto de ceros de la función $f(x)$ no tiene que ser denso en ninguna parte del intervalo $(a,\ b)$, además, cada cero ξ de la función $f(x)$ es simultáneamente un cero de la función $g(x)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to\xi}[g(x)/f(x)]$. **3364.** 1) Un conjunto infinito; 2) dos; 3) a) una; b) dos. **3365.** 1) Un conjunto infinito; 2) cuatro: $y = x$; $y = -x$; $y = |x|$; $y = -|x|$; 3) dos; 4) a) dos; b) cuatro; 5) una. **3366.** 1) En ninguno; 2) $0 < |x| < 1$, $|x| = \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}$; 3) $x = 0$, $|x| = 1$; 4) $1 < |x| < \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}$; las ramas uniformes son: $y = \varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ $\left(|x| \leqslant \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}\right)$; $y = \varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ $\left(1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}\right)$, donde $\varepsilon = -1,\ 1$. **3367.** Los puntos de ramificación son: $(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$; $y = \varepsilon(x)\sqrt{\dfrac{\sqrt{8x^2 + 1} - (2x^2 + 1)}{2}}$ $(|x| \leqslant 1)$,
donde $\varepsilon(x) = -1,\ 1$, $\text{sgn}\,x$ y $-\text{sgn}\,x$.
$-\text{sgn}\,x$. **3368.** El conjunto de valores de la función $\varphi(y)$ tiene que tener puntos comunes con el conjunto de valores de la función $f(x)$. **3371.** $y' = -\dfrac{x + y}{x - y}$; $y'' = \dfrac{2a^2}{(x - y)^3}$. **3372.** $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$; $y'' = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$. **3373.** $y' = \dfrac{1}{1 - \varepsilon\cos y}$; $y'' = \dfrac{-\varepsilon\sin y}{(1 - \varepsilon\cos y)^3}$. **3374.** $y' = \dfrac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}$; $y'' = \dfrac{y^2[y(1 - \ln x)^2 - 2(x - y)\times(1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2]}{x^4(1 - \ln y)^3}$. **3375.** $y' = \dfrac{y}{x}$; $y'' = 0$. **3378.** $y'_1(0) = -1$; $y'_2(0) = 1$. **3379.** $y'_1(0) = 0$; $y'_2(0) = -\sqrt{33}$; $y'_3(0) = \sqrt{3}$. **3380.** $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$; $y'' = -\dfrac{18}{(x + 2y)^3}$; $y''' = -\dfrac{162x}{(x + 2y)^5}$. **3381.** $y' = 0$; $y'' = -\dfrac{2}{3}$; $y''' = -\dfrac{2}{3}$. **3383.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{x^2 + z^2}{z^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{xy}{z^3}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$. **3384.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **3385.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=$
$=\frac{1}{x+y+z-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **3386.** $\frac{\partial z}{\partial x}=$
$=\frac{xz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
3388. a) -2; b) -1. **3389.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}$.
3390. $dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)$; $d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\right.$
$\left.+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$. **3391.** $dz=-\frac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy}$;
$d^2z=-\frac{2\{y(1-yz)\,dx^2+[x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2\}}{(1-xy)^2}$.
3392. $dz=\frac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$; $d^2z=-\frac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $dz=dx-$
$-\frac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$; $d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\,dy^2$.
3394. $du=-\frac{u^2(dx+dy)-z^2\,dz}{u[2(x+y)-u]}$. **3395.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}\times$
$\times[F'^2_2F''_{11}-2F'_1F'_2F''_{12}+F'^2_1F''_{22}]-\frac{2(F'_1+2xF'_2)(F'_1+2yF'_2)F'_2}{(F'_1+2zF'_2)^2}$. **3396.** $\frac{\partial z}{\partial x}=$
$=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}$. **3397.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right)$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F'^{-3}_3[F'^2_3(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})-2(F'_1+F'_2)F'_3(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}]$.
3398. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(xF'_1+yF'_2)^{-3}\cdot[y^2z^2(F'^2_2F''_{11}-2F'_1F'_2F''_{12}+F'^2_1F''_{22})-$
$-2z(xF'_1+yF'_2)F'^2_2]$. **3399.** a) $d^2z=-\frac{F'^2_2F''_{11}-2F'_1F'_2F''_{12}+F'^2_1F''_{22}}{(F'_1+F'_2)^3}(dx-dy)^2$;
b) $d^2z=\frac{F'^2_2F''_{11}-2F'_1F'_2F''_{12}+F'^2_1F''_{22}}{(xF'_1+yF'_2)^3}(y\,dx-x\,dy)^2$. **3399.1.** $dz=\frac{1}{9}(2dx-dy)$;
$d^2z=-\frac{2}{243}(2dx^2-5dx\,dy+2\,dy^2)$. **3401.** $\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$; $\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$.
3402. $\frac{dx}{dz}=0$, $\frac{dy}{dz}=-1$, $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}=-\frac{1}{4}$. **3403.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$;
$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2>0)$. **3403.1.** $du=-\frac{1}{3}dy$,
$dv=-dx+\frac{1}{3}dy$. **3404.** $du=\frac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$;

$dv=\frac{-(\sin v-y\cos u)\,dx}{x\cos v+y\cos u}+\frac{(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$; $d^2u=-d^2v=$
$=\frac{(2\,dx\cos v-x\,dv\sin v)\,dv}{x\cos v+y\cos u}-\frac{(2\,dy\cos u-y\,du\sin u)\,du}{x\cos v+y\cos u}$. **3405.** $du=$
$=\frac{1}{2}(dx+dy)$; $dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy)$; $d^2u=dx^2$; $d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2$.
3406. $\frac{dy}{dx}=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$; $\frac{dz}{dx}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2}=2$; $\frac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right)$.
3407. $y\geqslant\frac{x^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)\,(u\neq v)$. **3407.1.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}$. **3407.2.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{26}{121}$. **3408.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$
$=\frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz=0$; $d^2z=$
$=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$; $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$.
3412. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}$.
3413. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, donde $I=$
$=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\right.\right.$
$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right\}$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-\right.$
$\left.-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$, donde $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-$
$-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. **3415.** a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$;
$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$; b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$;
$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$;
$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+\right.\right.$
$\left.\left.+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right\}$,
donde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ y $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$.
3417. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, donde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ y $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x}=$
$=\frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}$, donde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$

y $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. 3419. $dz=-\frac{I_1\,dx+I_2\,dy}{I_3}$, donde $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$. 3431. $x'''+xx'^5=0$. 3432. $x^{IV}=0$. 3433. $\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. 3434. $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. 3435. $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. 3436. $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. 3437. $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$. 3438. $u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$. 3439. $\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$. 3440. $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. 3441. $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. 3442. $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. 3443. $t^5\frac{d^3u}{dt^3}+(3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=0$. 3444. $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^3}u$.

3446. $\Phi(1,\ u,\ u'+u^2)=0$. 3447. $F(xu'+u^2-u,\ \ u,\ 1)=0$. 3450. $\frac{dr}{d\varphi}=r$. 3451. $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. 3452. $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$. 3453. $\frac{r'}{r}$. 3454. $K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 3455. $\frac{dr}{dt}=kr^3$; $\frac{d\varphi}{dt}=-1$. 3456. $w=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. 3457. $Y'=x$; $Y''=\frac{1}{y'}$; $Y'''=-\frac{y'''}{y'^3}$. 3458. $z=\varphi(x+y)$, donde φ es una función diferenciable arbitraria. 3459. $z=\varphi(x^2+y^2)$. 3460. $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$.

3461. $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 3462. $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v$. 3463. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. 3464. $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$. 3465. $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}$. 3466. $(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$.

3467. $\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial\xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial\eta}}$. 3468. $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$. 3469. $\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$. 3470. $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$. 3471. $\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}$. 3472. $A=\frac{x^2-2xu+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$.

3473. $\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}+3u+(e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta})=0$. 3474. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. 3475. $\frac{\partial w}{\partial u}=0$. 3476. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. 3477. $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. 3478. $\frac{e^{2u}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$.

3479. $A=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}$. 3480. $\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$. 3481. $w=\frac{\partial u}{\partial\varphi}$. 3482. $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. 3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$. 3484. $w=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. 3485. $w=r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}$. 3486. $w=\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. 3487. $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$. 3488. $u=\varphi(x-at)+$

$+\psi(x+at)$, donde φ y ψ son funciones arbitrarias. 3489. $3\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$. 3490. $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$. 3491. $a\left(\frac{\partial^2z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}+c\left(\frac{\partial^2z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. 3492. $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$. 3493. $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$. 3494. $\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}=0$. 3495. $\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. 3496. $\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$. 3497. $(u^2-v^2)\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$. 3498. $\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$. 3499. $\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$.

3500. $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=1$. 3501. $u=\varphi(x+\lambda_1y)+\psi(x+\lambda_2y)$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$. 3503. a) $\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; b) $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$. 3504. $u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$. 3505. $A=X\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2u}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$. 3508. $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)$. 3509. $\frac{\partial^2z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_3^2}=0$. 3510. $\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2}=0$. 3511. $\Delta_1u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\times\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$; $\Delta_2u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$.

3512. $w\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. 3513. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=0$. 3514. $\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. 3515. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. 3516. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=2w$. 3517. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. 3518. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. 3519. $\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$. 3520. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. 3523. $\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=0$. 3524. $\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\partial w}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}+(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2\right]$. 3526. $x=y\varphi(z)+\psi(z)$. 3527. $A(X,Y)\times\frac{\partial^2Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X\,\partial Y}+C(X,\ Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X^2}=0$. 3528. $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\operatorname{tg}t_0+(y-y_0)\sin\alpha\operatorname{tg}t_0$, donde $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=a\sin t_0$. 3529. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=\frac{b}{2}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$. 3530. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. 3531. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$. 3532. $x+z=2$, $y+2=0$; $x-z=0$. 3533. $M_1(-1,\ 1,\ -1)$; $M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27}\right)$. 3537. $\operatorname{tg}\varphi=$

$= f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{16}{243}$. **3539.** $2x + 4y - z - 5 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x + 4y + 12z = 169$; $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$.

3541. $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - y)$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1$; $\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}$. **3543.** $x + y - 2z = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. **3544.** $x + y - 4z = 0$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

3545. $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0 + \frac{z}{c}\sin\psi_0 = 1$; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_0\operatorname{cosec}\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\operatorname{cosec}\psi_0 - c}{ab}$. **3546.** $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\frac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z - r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$. **3547.** $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0z = au_0v_0$; $\frac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2$.

3549. $A(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$; $B(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$; $C(\pm 4, \mp 2, 0)$. **3550.** $x = \pm\frac{a^2}{d}$, $y = \pm\frac{b^2}{d}$, $z = \pm\frac{c^2}{d}$, donde $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **3551.** $x + 4y + 6z = \pm 21$.

3556. $x^2 + y^2 - xy = 1$, $z = 0$; $3y^2 + 4z^2 = 4$, $x = 0$; $3x^2 + 4z^2 = 4$, $y = 0$.

3557. $\delta < 0{,}003$. **3559.** $\cos\varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$. **3563.** $\frac{\partial u}{\partial n} = x_0 + y_0 + z_0$; a) $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) en la circunferencia $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}$.

3566. $x^2 + y^2 = p^2$. **3567.** $y = \pm x$. **3568.** $y^2 = 4ax$. **3569.** No existe envolvente. **3570.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **3571.** $|xy| = \frac{S}{2\pi}$. **3572.** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** a) $y = 0$ es la envolvente (lugar geométrico de los puntos de inflexión); b) $y = 0$ es la envolvente; c) $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos singulares (puntos de retroceso); d) $x = 0$ es el lugar geométrico de los puntos dobles, $x = a$ es la envolvente. **3575.** El toro $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$. **3576.** $x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma = 1$. **3577.** $|xyz| = \frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$.

3578. $|z \pm \sqrt{x^2 + y^2}| = \varrho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2 \leqslant R^2(x^2 + y^2 + z^2)$. **3580.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$. **3581.** $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$. **3582.** $f(x, y, z) = 3[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - (x - 1)(y - 1) - (x - 1)(z - 1) - (y - 1)(z - 1)] + (x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 - 3(x - 1)(y - 1)(z - 1)$. **3583.** $\Delta f(1, -1) = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2k + hk^2)$. **3584.** $f(x + h, y + k, z + l) = f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + E) + k(Dx + By + F) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l)$.

3585. $x^y = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + R_2(1 + \theta(x - 1), 1 + \theta(y - 1))$ $(0 < \theta < 1)$, donde $R_2(x, y) = \frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx + \ln x \cdot dy\right)^3 + 3\left(\frac{y}{x}dx + \ln x \cdot dy\right) \times \left(-\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dx\,dy\right) + \left(\frac{2y}{x^3}dx^3 - \frac{3}{x^2}dx^2\,dy\right)\right]$ y $dx = x - 1$, $dy = y - 1$.

3586. $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$. **3587.** a) $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$; b) $\frac{\pi}{4} + x - xy$. **3588.** $-(xy + xz + yz)$. **3589.** $F(x, y) = \frac{h^2}{4}(f''_{xx} + f''_{yy}) + \frac{h^4}{48}(f^{IV}_{xxxx} + f^{IV}_{yyyy}) + \ldots$ **3590.** $F(\varrho) = f(x, y) + \frac{\varrho^2}{4}[f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)]$.

3591. $\Delta_{xy}f(x, y) = hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]$.

3592. $F(\varrho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}\Delta^n f(x, y)$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3593. $1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \ldots$ $(|x| < 1, |y| < 1)$. **3594.** $\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!\,n!}x^m y^n$ $(|x| + |y| < 1)$. **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!}$ $(|x| < +\infty, |y| < +\infty)$. **3596.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!}$ $(|x| < +\infty, |y| < +\infty)$. **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!\,(2n+1)!}$ $(|x| < +\infty, |y| < +\infty)$. **3598.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!\,(2n)!}$ $(|x| < +\infty, |y| < +\infty)$.

3599. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2 + y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x^2 + y^2 < +\infty)$.

3600. $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}$ $(|x| < 1, |y| < 1)$. **3601.** $f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)y$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!\,n!}$ $(|x| < +\infty,$

$|y| < +\infty$). **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n$ $(-\infty < x < +\infty,$ $0 < y < 2)$. **3604.** $z = 1 + [2(x-1) - (y-1)] - [8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2] + \cdots$ **3605.** (0, 0) es un punto aislado si $a < 0$; es un punto de retroceso si $a = 0$; es un punto doble si $a > 0$. **3606.** (0, 0) es un punto doble. **3607.** (0, 0) es un punto aislado. **3608.** (0, 0) es un punto aislado. **3609.** (0, 0) es un punto doble. **3610.** (0, 0) es un punto de retroceso (de segunda especie). **3611.** (0, 0) es un punto doble. **3612.** Si $a < b < c$, la curva consta de un óvalo y de una rama infinita; si $a = b < c$, $A(a, 0)$ es un punto aislado; si $a < b = c$, $B(b, 0)$ es un punto doble; si $a = b = c$, $A(a, 0)$ es un punto de retroceso. **3613.** (0, 0) es un punto doble. **3614.** (0, 0) es un punto de retroceso. **3615.** (0, 0) es un punto de terminación. **3616.** (0, 0) es un punto anguloso. **3617.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son puntos de discontinuidad de 1.ª especie. **3618.** $x = 0$ es un punto de discontinuidad de 2.ª especie. **3619.** $x = 0$ es un punto doble. **3620.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ es un punto de retroceso. **3621.** $z_{min} = 0$ para $x = 0, y = 1$. **3622.** No hay puntos de extremo. **3623.** Mínimo no estricto $z = 0$ en los puntos de la recta $x - y + 1 = 0$. **3624.** $z_{min} = -1$ para $x = 1, y = 0$. **3625.** $z_{max} = 108$ para $x = 2, y = 3$; mínimo no estricto $z = 0$ para $x = 0, 0 < y < 6$; máximo no estricto $z = 0$ para $x = 0, -\infty < y < 0$ y $6 < y < +\infty$. **3626.** $z_{min} = -1$ para $x = 1, y = 1$. **3627.** $z_{min} = -2$ para $x_1 = -1, y_1 = -1$ y $x_2 = 1, y_2 = 1$; no hay extremo para $x = 0, y = 0$. **3627.1.** Máximo $z = 0$ para $x = 0, y = 0$; mínimo $z = -1\frac{1}{8}$ para $x = \pm\frac{1}{2}, y = \pm 1$; punto de ensilladura $z = -1$ para $x = 0, y = \pm 1$, y punto de ensilladura $z = -\frac{1}{8}$ para $x = \pm\frac{1}{2}, y = 0$. **3628.** Mínimo $z = 30$ para $x = 5, y = 2$. **3629.** $z_{min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3630.** $z_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, si $c > 0$; $z_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ si $c < 0$; no hay extremo si $c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$. **3631.** $z_{max} = 1$ para $x = 0, y = 0$. **3632.** Mínimo $z = 0$ para $x = 0, y = 0$; punto de ensilladura $z = \frac{1}{2}e^{-2}$ para $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$. **3633.** Punto de ensilladura $z = e^3$ para $x = 1, y = -2$. **3634.** Máximo $z = e^{-13} \approx 2,26 \cdot 10^{-6}$ para $x = 1$, $y = 3$; mínimo $z = -26 \cdot e^{-\frac{1}{52}} \approx -25,51$ para $x = -\frac{1}{26}$, $y = -\frac{3}{26}$. **3635** Mínimo $z = 7 - 10 \ln 2 \approx 0,0685$ para $x = 1, y = 2$.

3636. $z_{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ para $x = \frac{\pi}{3}$

$y = \frac{\pi}{6}$. **3637.** $z_{min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ para $x = y = \frac{2\pi}{3}$; $z_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ para $x = y = \frac{\pi}{3}$. **3638.** Punto de ensilladura $z = -1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\pi \approx 1,70$ para $x = 1$, $y = 1$. **3639.** Mínimo $z = -\frac{1}{2e} \approx -0,184$ para $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx \pm 0,43$; máximo $z = \frac{1}{2e}$ para $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$; no hay extremos en los puntos estacionarios $x = 0, y = \pm 1$ y $x = \pm 1, y = 0$. **3640.** Puntos estacionarios; $x = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m+n)\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Extremo $z = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2\cdot(-1)^n$, si m y n son de paridad distinta (máximo si m es impar y n es par, mínimo si m es par y n es impar); no hay extremo si m y n son de igual paridad. **3641.** $z_{min} = 0$ para $x = 0$; $y = 0$; máximo no estricto $z = e^{-1}$ para $x^2 + y^2 = 1$. **3642.** $u_{min} = -14$ para $x = -1, y = -2, z = 3$. **3643.** Mínimo $u = -6913$ para $x = 24$, $y = -144, z = -1$. **3644.** Mínimo $u = 4$ para $x = \frac{1}{2}$, $y = 1, z = 1$. **3645.** $u_{max} = \frac{a^7}{7^7}$ para $x = y = z = \frac{a}{7}$; extremo no estricto $u = 0$ para $y = 0$, $x \neq 0, z \neq 0, x + 2y + 3z \neq a$. **3646.** Mínimo $u = \frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ para $x = \frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y = \frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^?}{4}}$. **3647.** Máximo $u = 4$ para $x = y = z = \frac{\pi}{2}$; mínimo en la frontera $u = 0$ para $x = y = z = 0$ y $x = y = z = \pi$. **3648.** $u_{max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ para $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2}{n^2+n+2}$. **3649.** Mínimo $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ para $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2 = x_1^2$, $\ldots$, $x_n = x_1^n$. **3650.** Los números $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$ b forman una progresión geométrica de razón $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. **3151.** Mínimo $z_1 = -2$ y máximo $z_2 = 6$ para $x = 1$, $y = -1$. **3652.** $z_{min} = -(4 + 2\sqrt{6})$ para $x = y = -(3 + \sqrt{6})$; $z_{max} = 2\sqrt{6} - 4$ para $x = y = -(3 - \sqrt{6})$. **3653.** Mínimo no estricto $z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z < 0$; máximo no estricto $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z > 0$. **3654.** $z_{max} = \frac{1}{4}$ para

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. **3655.** $z_{\min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ para $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z_{\max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ para $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, donde $\varepsilon=\operatorname{sgn} ab\neq 0$. **3656.** $z_{\max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ para $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$.

3657. $z_{\min}=\lambda_1$, $z_{\max}=\lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ y $\lambda_1<\lambda_2$. **3657.1.** Máximo $z=106\frac{1}{4}$ para $x=\pm 1\frac{1}{2}$, $y=\pm 4$; mínimo $z=-50$ para $x=\pm 2$, $y=\mp 3$. **3658.** Extremo $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ para $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ (máximo si k es par, y mínimo si k es impar). **3659.** $u_{\max}=3$ para $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; $u_{\min}=-3$ para $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. **3660.** $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ para $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. **3661.** $u_{\min}=c^2$ para $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{\max}=a^2$ para $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. **3662.** $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ para $x=y=z=\frac{a}{6}$.

3663. $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ para $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ para $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3663.1.** Máximo condicionado $u=2$ para $x=1$, $y=1$, $z=1$. **3664.** $u_{\max}=\frac{1}{8}$ para $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. **3665.** $u_{\min}=\lambda_1$ y $u_{\max}=\lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$.

3666. $u_{\min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{\max}=R^2$. **3667.** $u_{\min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ para $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3668.** $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$ para $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3669.** $u_{\min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$ para $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3670.** $u_{\max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}$ para $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$. **3671.** Los extremos $u=\lambda$ se determinan por las ecuaciones $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$, donde $\delta_{ij}=0$ para $i\neq j$ y $\delta_{ii}=1$.

3675. $\inf z=-5$, $\sup z=-2$. **3676.** $\inf z=-75$; $\sup z=125$. **3677.** $\inf z=0$; $\sup z=1$. **3678.** $\inf u=0$; $\sup u=300$. **3679.** $\inf u=-\frac{1}{2}$; $\sup u=1+\sqrt{2}$. **3680.** $\inf u=0$; $\sup u=e^{-1}\approx 0{,}37$. **3682.** No. **3683.** El mínimo es igual a $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$. **3684.** Los sumandos son iguales. **3685.** Los factores son iguales a

$$x_i=\frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\ldots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$ donde α_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son los exponentes respectivos de las potencias; el valor mínimo de la suma es $\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\ldots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}$. **3686.** $x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$, $y=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$, donde $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. **3687.** Las dimensiones de la bañera son $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **3688.** $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, donde R es el radio de la superficie cilíndrica y H es su generatriz.

3689. $x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$, donde $N=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$. La suma mínima de los cuadrados de las distancias es igual a $n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$. **3690.**

El ángulo de inclinación de las generatrices del cono respecto de la base es igual a $\arcsin \frac{2}{3}$. 3691. El ángulo de inclinación de las caras laterales de las pirámides respecto de sus bases es igual a $\arcsin \frac{2}{3}$. 3692. Los lados del rectángulo son $\frac{2p}{3}$ y $\frac{p}{3}$. 3693. Los lados del triángulo son $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ y $\frac{3p}{4}$. 3694. Las dimensiones del paralelepípedo son $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ y $\frac{R}{\sqrt{3}}$. 3695. La altura del paralelepípedo es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura del cono. 3696. Las dimensiones del paralelepípedo son $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. 3697. La altura del parapelepípedo es $h = l \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}$, si $\alpha \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, y $h = 0$ si $0 < \alpha < \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 3698. Las dimensiones del paralelepípedo son a, b y $\frac{c}{2}$. 3699. $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. 3700. $d = \frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$,

donde $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$. 3701. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. 3702. Los cuadrados de los semiejes $a^2 = \lambda_1$ y $b^2 = \lambda_2$ son raíces de la ecuación $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$. 3703. Los cuadrados de los semiejes $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = \lambda_2$ y $c^2 = \lambda_3$ son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3704. $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

3705. $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}}$.

3707. El ángulo de incidencia es igual a $\arcsin\left(n \sin\frac{\alpha}{2}\right)$; la desviación del rayo es igual a $2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$. . 3708. Los coeficientes buscados a y b se determinan por las ecuaciones $a[xx] + b[x1] = [xy]$, $a[x1] + bn = [y1]$, donde $[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc. El problema tiene solución determinada si $\sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 \neq 0$. 3709. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{xy})}{[\overline{x^2} - (\overline{x})^2] - [\overline{y^2} - (\overline{y})^2]}$, $p = \overline{x}\cos\alpha + \overline{y}\sin\alpha$, donde $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc., son los valores medios.

3710. $4x - \frac{7}{2}$; $\Delta_{min} = \frac{1}{2}$.

Capítulo VII

3711. $F(y) = 1$ si $-\infty < y < 0$. $F(y) = 1 - 2y$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$; $F(y) = -1$ si $1 < y < +\infty$. 3712. $F(y)$ es discontinua para $y = 0$. 3713. a) $\frac{\pi}{4}$; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) $\ln\frac{2e}{1+e}$. 3713.1. 0. 3715. No es posible. 3716. No es posible.

3717. $F'(x) = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_{x}^{x^2} y^2 e^{-xy^2}\,dy$.

3718. a) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha + e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha) + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1 - x^2}\, e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

b) $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$; c) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$;

d) $f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^{\alpha} f'_u(u, v)\,dx$, donde $u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$;

e) $2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2)\,dy + 2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cdot\cos 2\alpha x\,dx -$

$- 2\alpha\int_0^{\alpha^2} dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\,dy$. 3719. $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

3720. $F''(x) = 2f(x)$, si $x \in (a, b)$, y $F''(x) = 0$, si $x \overline{\in} (a, b)$.

3721. $F''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, donde $\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$.

3722. $F^{(n)}(x) = (n-1)!\, f(x)$. 3723. $4x - \frac{11}{3}$. 3724. $0{,}934 + 0{,}428x$ (¡aproximadamente!) 3725. $\frac{dE}{dk} = \frac{E - F}{k}$; $\frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. 3729. $F''_{xy}(x, y) = x(2 - 3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1 - y^2)f'(xy)$. 3732. $\pi\ln\frac{|a| + |b|}{2}$.

3733. 0, si $|a| \leqslant 1$; $\pi\ln a^2$, si $|a| > 1$. 3734. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a \ln(1 + |a|)$.

3735. $\pi\arcsin a$. 3736. $\frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$. 3737. $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

3738. a) $\operatorname{arctg}\frac{b - a}{1 + (a+1)(b+1)}$; b) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}$.

3741. $a \geqslant 0$. 3742. $\text{Max}(p, q) > 1$. 3743. $\left|\frac{p-1}{q}\right| < 1$. 3744. $p < 1$.

3745. $n < 0$ и $n > \frac{1}{2}$. 3746. $p > \frac{1}{2}$. 3747. Es convergente para $a > 0$ y

para $a=-\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1, 2, \ldots)$. 3748. Es convergente para $n>4$.
3749. Es convergente si $p>1$. 3750. Es convergente si $-1<n<2$.
3755.1. a) Es uniformemente convergente; b) converge no uniformemente.
3755.2. Converge no uniformemente. 3756. Es uniformemente convergente.
3757. Es uniformemente convergente. 3758. Es uniformemente convergente.
3759. Converge no uniformemente. 3760. Es uniformemente convergente.
3760.1. Es uniformemente convergente. 3761. Es uniformemente conver-
gente. 3762. Converge no uniformemente. 3763. a) Es uniformemente con-
vergente; b) converge no uniformemente. 3764. Converge no uniformemente.
3765. Es uniformemente convergente. 3765.1. $b \geqslant 10^{70}$. 3766. a) Es unifor-
memente convergente; b) converge no uniformemente. 3767. Es uniforme-
mente convergente. 3768. Converge no uniformemente. 3769. Es uniforme-
mente convergente. 3770. Es uniformemente convergente. 3772. No.

3776. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3776.2. 1. 3778. $a=\pm 1$. 3779. Es continua. 3780. Es continua. 3781. Es continua. 3782. Es continua. 3783. Es discontinua para $\alpha=0$.

3784. $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. 3785. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. 3788. $\ln\frac{b}{a}$. 3790. $\ln\frac{b}{a}$.

3791. 0. 3792. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 3794. $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$.

3795. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$ $(m\neq 0)$. 3796. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$.

3797. $-\pi\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$. 3798. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

3799. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln\left(|\alpha|+|\beta|\right)$ $(\beta\neq 0)$.

3801. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$. 3802. $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+$
$+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$. 3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3805. $\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}}$. 3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. 3808. $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$. 3809. $\frac{1}{2}\times$
$\times\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3810. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3811. $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{d^{2n}}{db^{2n}}\left(e^{-b^2}\right)$.

3812. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$. 3812.1. La función es impar. Para $x>0$ tiene mínimos en los puntos $2k\pi$ y máximos en los puntos $(2k-1)\pi$, donde $k=1, 2, 3, \ldots$ Las asíntotas son $y=\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to+\infty$ e $y=-\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to-\infty$

3813. $\pi\frac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$. 3814. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$.

3815. 0, si $|\alpha|<|\beta|$; $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$, si $|\alpha|=|\beta|$, $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$, si $|\alpha|>|\beta|$.

3816. $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$. 3817. $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. 3818. $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$.

3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$.

3823. $D(x)=1$ para $|x|<1$; $D(x)=\frac{1}{2}$ para $x=\pm 1$; $D(x)=0$ para $|x|>1$. 3824. a) $\pi\operatorname{sgn}a\cos ab$; b) $\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

3826. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$. 3827. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$.

3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. 3829. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}\,e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$.

3830. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 3831. $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right)$.

3832. $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 3833. $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 3835. a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$;
b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; c) $\frac{1}{p-\alpha}$ si $p>\alpha$; d) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$; e) $\frac{p}{p^2+1}$; f) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
g) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. 3837. a) 1; b) $x^2+\frac{1}{2}$; c) e^{2ax+a^2}; d) $\frac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax$.

3839. $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, donde $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. 3843. $\frac{\pi}{8}$. 3844. $\frac{\pi a^4}{16}$.

3845. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3846. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3847. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3848. $\frac{3\pi}{512}$. 3849. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

3850. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. 3851. $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ $(0<m<n)$. 3852. $\mathrm{B}(n-m, m)$
$(0<m<n)$. 3853. $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)\left(0<\frac{m+1}{n}<p\right)$.

3854. $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\mathrm{B}(m+1, n+1)$ $(m>-1,\ n>-1)$. 3855. $\frac{1}{m}\times$
$\times\mathrm{B}\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right)$ $(n<0$ o $n>1)$. 3856. $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ $(m>-1,$
$n>-1)$. 3857. $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $(|n|<1)$. 3858. $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ $(n>0)$.

3859. $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n>0)$. 3860. $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\left(\frac{m+1}{n}>0\right)$. 3861. $\Gamma(p+1)$

$(p > -1)$. 3862. $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p > -1)$. 3863. $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0 < p < 1)$.

3864. $\pi^2 \cdot \frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0 < p < 1)$. 3864.1. $\frac{2}{27}\pi^2$. 3864.2. $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.

3865. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|$ $(0 < p < 1, 0 < q < 1)$; 0 $(p = q)$. 3866. $\pi \operatorname{ctg} \pi p$. 3867. $\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2\beta}$.

3868. $\ln\sqrt{2\pi}$. 3869. $\ln\sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$.

3870. $\frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right)$. 3871. $\frac{1}{4n}$. 3876. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$ $(a > 0)$.

3877. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$ $(a > 0)$. 3879. $a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$. 3880. $\frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$.

3881. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3882. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3883. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a) - \sin\lambda(x-b)}{\lambda}\,d\lambda$.

3884. $f(x) = \frac{2h}{\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$.

3885. $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3886. $\frac{x}{a^2+x^2} = \int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3887. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$. 3888. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$.

3889. $f(t) = \frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t\,d\lambda$. 3890. $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda$.

3891. $f(x) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda$.

3892. $f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}\,d\lambda$. 3893. $e^{-x^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3894. $xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3895. a) $e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$ $(0 \leq x < +\infty)$; b) $e^{-x} =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$ $(0 < x < +\infty)$. 3896. $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$.

3897. $F(x) = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

3898. $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 3899. $F(x) = e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}}\operatorname{ch}\alpha x$.

3900. a) $\psi(y) = e^{-y}$ $(y \geq 0)$; b) $\psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2}$ $(y \geq 0)$.

Capítulo VIII

3901. $\frac{1}{4}$. 3902. $\underline{S} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $\bar{S} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$.

3903. 9,88. El valor exacto es $2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13{,}20$. 3904. 0,402. El valor exacto es 0,4.

3905. $\delta < 0{,}00022$. 3906. 1. 3907. $\frac{1}{40}$. 3908. $\frac{\pi a^2}{3}$. 3910. $I = F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b)$. 3912. a) Negativo; b) negativo; c) positivo.

3913. $\frac{1}{4}$. 3914. $1{,}96 < I < 2$. 3915. $a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$.

3916. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x, y)\,dx$. 3917. $\int_{-2}^{2} dx\int_{\frac{|x|}{2}}^{1} f(x, y)\,dy =$

$= \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x, y)\,dx$. 3918. $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx +$

$+ \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x, y)\,dx$. 3919. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3920. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3921. $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$.

3922. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{1}^{1} dx \left\{ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy \right\} + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy$. 3924. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\, dx$. 3925. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^8 dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\, dx$. 3926. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx$.

3927. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx$.

3928. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx$.

3929. $\int\limits_0^a dy \left\{ \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx \right\} + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\, dx$.

3930. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\, dx$. 3931. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\, dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y)\, dx$.

3932. $\frac{p^5}{21}$. 3933. $\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a\sqrt{a}$. 3934. $\frac{a^4}{2}$. 3935. $14a^4$. 3936. $\frac{35\pi a^4}{12}$.

3937. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr$. 3938. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr$.

3939. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr$. 3940. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr$.

3941. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr +$

$+ \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr$. 3942. Cuando el recinto de integración está limitado por dos circunferencias concéntricas con el centro en el origen de coordenadas y por dos rayos que parten del origen de coordenadas.

3943. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr =$

$= \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$.

3944. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\, dr \int\limits_{\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$.

3945. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\, dr = \frac{\pi}{12} \int\limits_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\, dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\, dr$.

3946. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr = \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi +$

$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$.

3947. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr =$

$= \int\limits_0^a r\, dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$.

3948. $\int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\, d\varphi$. 3949. $\int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\, d\varphi$.

3950. $\int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r)\, d\varphi$. 3951. $2\pi \int_0^1 rf(r)\, dr$. 3952. $\pi \int_0^1 rf(r)\, dr +$

$+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\, dr$. 3953. $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi$. 3954. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

3955. $-6\pi^2$. 3956. $\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})(\sqrt{b}+\sqrt{b+h})}$; $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{2}}$.

3957. $\int_a^b u\, du \int_2^3 f(u, uv)\, dv$. 3958. $\frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$.

3959. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos^3 v\, dv \int_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\, du$. 3961. $u = xy$, $v = x - y$.

3962. $\int_{-1}^1 f(u)\, du$. 3963. $2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\, du$. 3964. $\ln 2 \int_1^2 f(u)\, du$.

3965. $\frac{\pi}{2}$. 3966. $\frac{4}{3}$ 3967. $\frac{2}{3}\pi ab$. 3968. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3969. $543\frac{11}{15}$. 3970. $1\frac{37}{125} - \ln 2$.

3971. 2π. 3972. $\frac{9}{16}\pi$. 3973. $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}$. 3974. $\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

3975. 6. 3976. $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$. 3978. $f(0, 0)$. 3979. $\frac{2}{t}F(t)$,

si $t > 0$. 3980. $2\iint_{(x-t)^2+(y-t)^2\leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$. 3981. $F'(t) =$

$= \int_0^{2\pi} tf(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\, d\varphi$. 3984. $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2$. 3985. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

3986. πa^2. 3987. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$. 3988. $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. 3989. $\frac{\pi a^2}{4}$.

3990. $a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. 3991. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. 3992. $\frac{ab}{3}\times$

$\times\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$. 3993. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. 3994. $\frac{a^2bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$.

3994.1. $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^3}$. 3995. $\frac{ab}{70}$. 3996. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. 3997. $\frac{a^2}{2}\ln 2$.

3998. $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$. 3998.1. $\frac{1}{15}\cdot(b^5-a^5)(c^{-3}-d^{-3})$. 3998.2. $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\times$

$\times\left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$. 3999. $\frac{65}{108}ab$. 3999.1. $\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\right.$

$\left.+\frac{12}{25}\right)ab$. 4000. $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$. 4001. $\frac{\pi}{|\delta|}$. 4002. $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)\times$

$\times(\operatorname{sh}2u_2 - \operatorname{sh}2u_1) - (u_2-u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]$. 4003. $\frac{2}{3}\pi a^2$. 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$.

4007. $\frac{5}{6}$. 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3}R^3$. 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π. 4011. π. 4012. $\frac{17}{12} - 2\ln 2$.

4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. 4014. $\frac{\pi}{8}$. 4015. $\frac{45}{32}\pi$. 4016. $\frac{16}{9}a^3$. 4017. $\frac{\pi a^4}{8}$.

4018. $\pi(1-e^{-R^2})$. 4019. $2a^2c\cdot\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$. 4021. $\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$.

4022. $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1)$. 4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. 4024. $\frac{2}{3}\pi abc$. 4025. $\frac{abc}{3}$.

4026. $\frac{2}{9}abc(3\pi+20-16\sqrt{2})$. 4027. $\frac{\pi(b^5-a^5)}{12}$. 4028. $\frac{9}{2}a^4$. 4029. $\frac{3}{4}$.

4030. $\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 4031. $\frac{8}{35}$. 4032. $\frac{75}{256}\pi abc$. 4033. $\frac{\pi^4a^2c}{128}$. 4033.1. $(n-m)\times$

$\times(e^{-1}-e^{-2})a^2$. 4034. $\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. 4035. $\frac{abc}{2m+n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$.

4036. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. 4037. $16a^2$. 4038. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4040. $8a^2$. 4041. $\pi\sqrt{2}$. 4042. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4043. $-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+$

$+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4044. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. 4045. $2a^2$. 4045.1. $\frac{\pi}{6}[3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})]$.

4045.2. $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{c^3}\right]$. 4045.3. $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\times$

$\times\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. 4045.4. $\frac{\pi}{2}\ln(e+e^{-1})$. 4046. $S = 4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$.

4047. $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, donde φ_1, φ_2 son las longitudes de los meridianos, ψ_1, ψ_2 son las latitudes de los paralelos, R es el radio de la esfera.

4048. $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right\}$.

4049. $S = a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$; $4\pi^2ab$. 4050. ω =

$= \arcsin \dfrac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\quad \omega \approx \dfrac{bc}{a^2}$. **4051.** $\dfrac{\varrho_0 a^2}{3}\,[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$.

4052. $x_0 = -\dfrac{a}{2}$; $\quad y_0 = \dfrac{8}{5}a$. **4053.** $x_0 = y_0 = \dfrac{a}{5}$. **4054.** $x_0 = y_0 = \dfrac{256}{315\pi}a$.

4055. $x_0 = \dfrac{a^2 b}{14c^2}$; $y_0 = \dfrac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0 = \dfrac{5}{6}a$; $y_0 = \dfrac{16}{9\pi}a$.

4058. $x_0 = \pi a$, $y_0 = \dfrac{5}{6}a$. **4059.** $x_0 = -\dfrac{a}{5}$; $y_0 = 0$. **4060.** La parábola $y_0 = \dfrac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x = \dfrac{bh^3}{12}$; $\quad I_y = \dfrac{h\,|b_1^3 - b_2^3|}{12}$ $(b = |b_1 - b_2|)$. **4062.** $I_x = I_y = \dfrac{a^4}{16}(16-5\pi)$. **4063.** $I_x = \dfrac{21\pi a^4}{32}$; $\quad I_y = \dfrac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x = I_y = \dfrac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$.

4065. $I_x = I_y = \dfrac{9}{8}a^4$. **4066.** $I_0 = \dfrac{\pi a^4}{8}$. **4066.1.** $\dfrac{a^4}{12}$. **4069.** $I_a = \dfrac{a^4}{32\sqrt{3}}$.

4070. $X = ah^2$, $Y = 0$, donde X, Y, son las proyecciones de la presión sobre los ejes de coordenadas Ox y Oy.

4071. $P_1 = \pi a^2\delta\left(h - \dfrac{2}{3}a\right)$; $P_2 = \pi a^2\delta\left(h + \dfrac{2}{3}a\right)$.

4072. Las proyecciones de la presión sobre los ejes Ox y Oz, situados en el plano vertical que pasa por el eje del cilindro, donde el eje Ox es horizontal y el eje Oz es vertical, son respectivamente iguales a:

$X_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \dfrac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha, \qquad Z_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \dfrac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha;$

$X_2 = \pi a^2\delta\left(h + \dfrac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha, \qquad Z_2 = \pi a^2\delta\left(h + \dfrac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$

4073. Las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes Ox, Oy, Oz, son respectivamente iguales a: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\dfrac{2\pi mM}{a^2 h}\{|b| - |b-h| + \sqrt{a^2+(b-h)^2} - \sqrt{a^2+b^2}\}$, donde k es la constante de gravitación.

4074. $p_m = \dfrac{1}{2}p_0$. **4075.** $A = \dfrac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2} + a^3\ln\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} + b^3\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$. **4076.** $\dfrac{1}{364}$. **4077.** $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{5}{16}$. **4078.** $\dfrac{1}{48}$.

4079. $\dfrac{4}{5}\pi abc$. **4080** $\dfrac{\pi}{6}$. **4081.** $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^x dz\int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\,dy + \int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-x}^{1-x} f(x, y, z)\,dy\right\} = \int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^z dy\int\limits_{z-y}^{1-y} f(x, y, z)\,dx + \int\limits_z^1 dy\int\limits_0^{1-y} f(x, y, z)\,dx\right\}$.

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{|x|}^1 dz\int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)\,dy = \int\limits_0^1 dz\int\limits_{-z}^z dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\,dx$.

4083. $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^{x^2} dz\int\limits_0^1 f(x, y, z)\,dy + \int\limits_{x^2}^{x^2+1} dz\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z)\,dy\right\} =$

$= \int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^{\sqrt{z}} dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z)\,dx + \int\limits_{\sqrt{z}}^1 dy\int\limits_0^1 f(x, y, z)\,dx\right\} +$

$+ \int\limits_1^2 dz\int\limits_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z)\,dx.$

4084. $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\,d\zeta$. **4085.** $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-z^2)f(z)\,dz + \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$.

4086. $F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) + F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)$. **4087.** $\dfrac{\pi}{10}$. **4088.** $\dfrac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

4089. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi\,d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r)\,dr$. **4090.** $\dfrac{\pi^2 abc}{4}$.

4091. $\dfrac{16\pi}{3}$. **4092.** $\dfrac{2}{27}\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\beta^2}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$.

4093. $\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)(b^8 - a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\ln\dfrac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\dfrac{6}{5}$.

4095. $3(e-2)$. **4096.** $u = \dfrac{4\pi}{3}\,\dfrac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}$, donde $|\theta| < 1$. **4098.** a) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; b) $F'(t) = \dfrac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_V xyz\,f'(xyz)\,dx\,dy\,dz\right]$, donde $t > 0$ y $V = \{0 \leqslant x \leqslant t,\ 0 \leqslant y \leqslant t,\ 0 \leqslant z \leqslant t\}$. **4099.** 0, si uno de los números m, n y p es impar; $\dfrac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, si los números m, n y p son pares. **4100.** $\dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\dfrac{3}{35}$. **4102.** $\dfrac{7}{24}$.

4103. $\dfrac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\dfrac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3.

4108. $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\dfrac{1}{2}$. **4110.** $\dfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **4111.** $\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{a^2 bc}{h}$. **4112.** $\dfrac{\pi^2}{4}abc$.

4112.1. $\dfrac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. **4113.** $\dfrac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$. **4114.** $\dfrac{8\pi}{5}abc$. **4115.** $\dfrac{abc}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

4116. $\dfrac{abc}{60}\left(\dfrac{a}{h} + \dfrac{b}{k}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}\right)$. **4116.1.** $\dfrac{abc}{60}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a}{h}\right)^4}{\dfrac{a}{h} + \dfrac{b}{k}}$. **4117.** $\dfrac{abc}{554\,400}$.

4118. $\frac{abc}{3}$. 4118.1. $\frac{abc}{90}$. 4118.2. $\frac{abc}{1680}$. 4118.3. $\frac{4\pi}{35}abc$. 4119. $\frac{9}{4}a^2$.
4120. $\frac{1}{3}(b^2-a^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. 4121. $\frac{4\pi}{3}a^3$. 4122. $\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1})$.
4123. $\frac{3}{2}abc$. 4124. $5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)$. 4125. 37:27. 4126. $V=\frac{5\pi a^3}{6}$; $S=\frac{\pi a^2}{6}\times$ $\times(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$. 4127. $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. 4128. $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$ 4129. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}$.
4130. $\frac{abc}{mn+mp+np}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. 4131. $\frac{3}{2}$. 4132. $4\pi\varrho_0\left(\frac{1}{k}+\right.$ $\left.+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. 4133. $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}c\right)$. 4134. $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$; $z_0=\frac{7}{30}a^2$.
4135. $x_0=\frac{7}{15}p$. $y_0=0$; $z_0=\frac{7}{176}p$. 4136. $x_0=\frac{3}{8}a$; $y_0=\frac{3}{8}b$; $z_0=\frac{3}{8}c$.
4137. $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3a}{8}$. 4138. $x_0=y_0=1$; $z_0=\frac{5}{3}$. 4139. $x_0=\frac{9\pi}{448}a$; $y_0=\frac{9\pi}{448}b$; $z_0=\frac{9\pi}{448}c$. 4140. $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{7}{20}$. 4141. $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=$ $=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. 4142. $x_0=\alpha$; $y_0=\beta$; $z_0=\gamma$. 4143. $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}$; $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$. 4144. $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. 4145. $I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{xz}=\frac{\pi ab^3c}{20}$. 4146. $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$; $I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$; $I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$. 4147. $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$.
4147.1. $I_{yz}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc$; $I_{zx}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c$; $I_{xy}=\frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$. 4147.2. $I_{yz}=$ $=\frac{1}{5n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot a^3bc$; $I_{zx}=\frac{1}{5n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot ab^3c$; $I_{xy}=\frac{1}{5n^2}\times$ $\times\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot abc^3$. 4148. $I_z=\frac{14}{15}$. 4149. $I_z=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$. 4149.1. $\frac{\pi}{5}a^5$.
4150. $\frac{4}{9}MR^2$. 4153. $I=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$, donde $M=2\pi\rho_0a^2h$ es la masa del cilindro.
4154. $I_0=\frac{\pi^2a^5\varrho_0}{8}$. 4155. $u=2\pi\varrho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)$, si $r\leqslant R$; $u=\frac{4\pi R^3\varrho_0}{3r}$, si $r>R$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 4156. $u=4\pi\int\limits_{R_1}^{R_2}f(\varrho)\min\left(\frac{\varrho^2}{r},\varrho\right)d\varrho$, donde $r=$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 4157. $u=\pi\varrho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)\times\right.$ $\left.\times|h-z|+z|z|]+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right|\right\}$. 4158. $X=0$; $Y=0$; $Z=-\frac{kMm}{a|a|}$, si $|a|\geqslant R$, $Z=-\frac{kMm}{R^3}a$, si $|a|<R$. 4159. $X=0$; $Y=0$; $Z=-2\pi\varrho_0k\{\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\}$. 4160. $X=0$; $Y=0$; $Z=-\pi k\varrho_0R\sin^2\alpha$. **4161.** Es convergente si $p>1$. **4162.** Es convergente si $p>1$ y $q>1$. **4163.** Es convergente si $p>\frac{1}{2}$. **4164.** Es convergente si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. **4165.** Es divergente.

4169. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}(p>q>1)$. 4170. $\frac{1}{p-1}(p>1)$. 4171. 2π.
4172. $\frac{\pi}{p-1}(p>1)$. 4173. $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ 4174. $\frac{1}{2}$. 4175. π. 4176. $\frac{\pi}{2}$.
4177. $\frac{\pi}{2}$. 4178. $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}$, donde $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}$ y $\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}$. 4179. $\frac{\pi}{e}ab$.
4180. $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **4181.** Es convergente. **4182.** Es convergente si $p<1$.
4183. Es convergente si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. **4184.** Es convergente si $p<1$. **4185.** es convergente si $p<1$. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **4190.** 2.
4191. Es convergente si $p>\frac{3}{2}$. **4192.** Es convergente si $p<\frac{3}{2}$. **4193.** Es convergente si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. **4194.** Es convergente si $p<1$. **4195.** Es convergente si $p<1$. 4196. $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1,\ q<1,$ $r<1)$. 4197. $\frac{4\pi}{3}$. 4198. $2\pi\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right)(p<1)$. 4199. $\pi^{\frac{3}{2}}$. 4200. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, donde $\Delta=|a_{ij}|$. 4204. a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. 4205. $\frac{a^n}{n!}$. 4206. $\frac{1}{2^nn!}$.
4207. $\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$. 4208. $\frac{2^nh_1h_2\ldots h_n}{|\Delta|}$. 4209. $\frac{a_1a_2\ldots a_n}{n!}$.
4210. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1a_2\ldots a_n$. 4211. $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. 4212. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{n-1}h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. 4218. $R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 f(\sqrt{u})\, u^{\frac{n}{2}-1}\, du$. 4219. $u=\frac{16}{15}\pi^2\varrho_0^2R^5$.

4220. $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}\, e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, donde $\delta=|a_{ij}|$ y $\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c\end{vmatrix}$ es el determinante orlado. 4221. $1+\sqrt{2}$. 4222. $\frac{256}{15}a^3$. 4223. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$. 4224. $\frac{a^3}{6}(\text{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1)$.

4225. $4a^{\frac{7}{3}}$. 4226. $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. 4227. $2a^2(2-\sqrt{2})$. 4228. $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

4229. $2a^2$. 4230. $\frac{\pi}{a}$. 4231. 5. 4232. $\sqrt{3}$. 4233. $|x_0|+|z_0|$, donde $|x_0|<a$.

4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. 4235. $\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2}\times\text{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$. 4237. $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. 4238. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

4239. $\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$. 4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$.

4241. $2b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, donde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es la excentricidad de la elipse.

4241.1. $\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)$. 4242. $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. 4243. $x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. 4244. $x_0=y_0=\frac{4}{3}a$. 4244.1. $S_x=S_y=\frac{3}{5}a^2$. 4244.2. πa^2. 4244.3. a) $\frac{32}{3}a^2$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. 4244.4. $r_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

4245. $x_0=y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}$. 4246. $x_0=\frac{2}{5}$; $y_0=-\frac{1}{5}$; $z_0=\frac{1}{2}$. 4247. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. 4248. a) 0; b) $\frac{2}{3}$; c) 2

4249. a) 2; b) 2; c) 2. 4250. $-\frac{14}{15}$. 4251. $\frac{4}{3}$. 4252. 0. 4253. $-2\pi a^2$. 4254. -2π.

4255. 0. 4256. 0. 4257. $\frac{\pi}{4}-1$. 4258. 8. 4259. 12. 4260. 4. 4261. -2.

4262. $\int_0^{a+b}f(u)\,du$. 4263. $-\frac{3}{2}$. 4264. 9. 4265. $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. 4266. 62.

4267. 1. 4268. $\pi+1$. 4269. $e^a\cos b-1$. 4271. $z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$.

4272. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$. 4273. $z=-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\ln|x+y|+C$. 4274. $z=$

$=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$. 4275. $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C$. 4276. $z=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\times\left(\text{arctg}\frac{x}{y}\right)+C$. 4278. $|I_R|\leqslant\frac{8\pi}{R^2}$. 4279. $\frac{1}{35}$. 4280. $-\pi a^2$. 4281. $2\pi\sqrt{2}a^2\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 4282. $-\frac{\pi a^3}{4}$. 4283. -4. 4284. $-53\frac{7}{12}$. 4285. 0. 4286. $b-a$.

4287. $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy+\int_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,dz$. 4288. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(u)\,du$.

4289. $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)\,du$. 4290. $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$. 4291. $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$. 4292. $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\text{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. 4293. $A=-mg(z_2-z_1)$. 4294. $A=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. 4295. $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$, donde $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1, 2)$. 4296. $I=\iint_S y^2\,dx\,dy$. 4297. $-46\frac{2}{3}$. 4298. $\frac{\pi a^4}{2}$.

4299. $-2\pi ab$. 4300. $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$. 4301. 0. 4302. $I_1-I_2=2$. 4303. $\frac{\pi ma^2}{8}$.

4304. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$. 4305. $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, donde u es una función dos veces diferenciable y k es una constante. 4306. $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$. 4307. 1) $I=0$; 2) $I=2\pi$.

4308. πab. 4309. $\frac{3}{8}\pi ab$. 4310. $\frac{a^2}{6}$. 4311. $\frac{3}{2}a^2$. 4312. a^2. 4313. $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

4314. $\frac{a^2}{2}\text{B}(2m+1, 2n+1)$. 4315. $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 4316. $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$.

4317. $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. 4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. 4319. $\pi(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$.

4320. $4a^2$. 4321. $\text{sgn}(ad-bc)$. 4322. $I=\sum\text{sgn}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$, donde la suma se extiende a todos los puntos de intersección de las curvas: $\varphi(x, y)=0$ y $\psi(x, y)=0$, situados en la parte interior del circuito C. 4324. $I=2S$, donde S es el área de la figura limitada por el circuito C. 4325. $X'_x(x_0, y_0)+Y'_y(x_0, y_0)$. 4326. Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coordenadas son iguales a: $X=0$; $Y=\frac{2kmM}{\pi a^2}$, donde k es la constante de gravitación. 4327. $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{R}$, si

$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R$; $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{\varrho}$, si $\varrho>R$. 4328. $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^m\cos m\varphi$, $I_2=\frac{\pi}{m}\varrho^m\sin m\varphi$, si $0\leqslant\varrho\leqslant 1$; $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\sin m\varphi$, si $\rho>1$. 4329. $u=2\pi$ si el punto $A(x, y)$ está situado en el interior del circuito C; $u=\pi$ si el punto $A(x, y)$ está situado en el circuito C; $u=0$ si el punto $A(x, y)$ está situado en el exterior al circuito C.
4330. $K_1=\pi\varrho^m\cos m\varphi$, $K_2=\pi\varrho^m\sin m\varphi$, si $0\leqslant\varrho<1$; $K_1=0$, $K_2=0$, si $\varrho=1$; $K_1=-\frac{\pi}{\varrho^m}\cos m\varphi$, $K_2=-\frac{\pi}{\varrho^m}\sin m\varphi$, si $\varrho>1$. 4339. $Q=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 4340. $H_x=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)\,dz-(\zeta-z)\,dy]$; $H_y=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)\,dx-(\xi-x)\,dz]$; $H_z=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)\,dy-(\eta-y)\,dx]$.

4341. $I_1-I_2=(4\pi-2\sqrt{3})a^4$. 4342. $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3$. 4343. πa^3. 4344. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

4345. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. 4346. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. 4347. $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. 4348. $\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]$. 4349. $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 4350. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. 4352. $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. 4352.1. πa^2. 4352.2. $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$.

4353. $\frac{4}{3}\pi\varrho_0 a^3$. 4354. $\frac{\pi\varrho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. 4355. $x_0=\frac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\frac{16}{9\pi}a$.

4356. $x_0=y_0=\frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. 4356.1. a) $40a^4$; b) $\pi R\left[R(R+H)^2+\frac{2}{3}H^2\right]$. 4356.2. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 4375. Las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes de coordenadas son:
$X=0$; $Y=0$; $Z=\pi kmp_0\ln\frac{a}{b}$. 4358. $u=4\pi\varrho_0\min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$, donde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 4359. $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, si $|t|\leqslant\sqrt{3}$; $F(t)=0$, si $|t|>\sqrt{3}$. 4360. $F(t)=\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. 4361. $F=0$, si $t\leqslant r-a$; $F=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2]$, si $r-a<t<r+a$; $F=0$, si $t>r+a\ (t\geqslant 0)$.

4362. $4\pi a^3$. 4363. $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$. 4364. 0.

4365. $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. 4366. $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. 4367. $-\pi a^2\sqrt{3}$. 4368. $\frac{h^3}{3}$.

4369. 2 пл.S. 4370. 0. 4371. $-2\pi a(a+h)$. 4372. $2\pi Rr^2$. 4373. $-\frac{9}{2}a^3$. 4374. 0.

4376. $3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. 4377. 0. 4378. $2\iiint\limits_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4379. $\iiint\limits_V\Delta u\,dx\,dy\,dz$, donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 4380. 0. 4384. $\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|$.

4385. $\frac{2}{9}a^3$. 4385.1. $2\pi^2a^2b$. 4387. $3a^4$. 4388. $\frac{12}{5}\pi a^5$. 4389. 1. 4390. $-\frac{\pi h^4}{2}$.
4392. a) $I=0$; b) $I=4\pi$. 4401. a) $\text{grad}\,u(0)=3i-2j-6k$, $|\text{grad}\,u(0)|=7$, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$; b) $\text{grad}\,u(A)=6i+3j$, $|\text{grad}\,u(A)|=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; c) $\text{grad}\,u(B)=7i$, $|\text{grad}\,u(B)|=7$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $\text{grad}\,u=0$ en el punto $M(-2, 1, 1)$.
4401.1. $\text{grad}\,u(M)=12i-9j-20k$, $|\text{grad}\,u(M)|=25$, $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. 4402. a) $xy=z^2$; b) $x=y=0$ y $x=y=z$; c) $x=y=z$. 4403. $r=1$ 4404. $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1\ (u\geqslant 16)$; $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. 4405. $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$. 4406. Las superficies de nivel son las hojas de conos; las superficies de nivel del módulo del gradiente son toros; $\inf u=0$,
$\sup u=1$; $\inf|\text{grad}\,u|=0$, $\sup|\text{grad}\,u|=\frac{1}{2}$. 4407. $\frac{|\Delta c|}{|\text{grad}\,u(x_0, y_0, z_0)|}$.
4409. a) $\frac{r}{r}$; b) $2r$; c) $-\frac{r}{r^3}$. 4410. $f'(r)\frac{r}{r}$. 4411. c. 4412. $2r(c\cdot c)-2c(c\cdot r)$.

4415.1. a) $\text{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}e_z$, donde $e_r=i\cos\varphi+j\sin\varphi$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+j\cos\varphi$, $e_z=k$ son los vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes;
b) $\text{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$, donde $e_r=i\cos\varphi\sin\theta+j\sin\varphi\sin\theta+k\cos\theta$, $e_\theta=i\cos\varphi\cos\theta+j\sin\varphi\cos\theta-k\sin\theta$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+j\cos\varphi$ son los vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes.
4416. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{r}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r}=|\text{grad}\,u|$, si $a=b=c$.
4417. $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\cos(l, r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, si $l\perp r$. 4418. $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\text{grad}\,u\,\text{grad}\,v}{|\text{grad}\,v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, si $\text{grad}\,u\perp\text{grad}\,v$. 4419. $a=\frac{i(\sqrt{x^2+y^2}+yz)-j(\sqrt{x^2+y^2}+xz)+k(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.
4420. $y=c_1x$, $z=c_2x^2$. 4422.1. $\text{div}\,a(M)=\frac{18}{125}$; $\Pi=\frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. 4423. 0.
4425. $\text{div}(\text{grad}\,u)=\Delta u$, donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 4426. $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$; $f(r)=$

$= c + \frac{c_1}{r}$, donde c y c_1 son constantes. 4427. a) 3; b) $\frac{2}{r}$. 4428. $\frac{f'(r)}{r}(c \cdot r)$.

4429. $3f(r) + rf'(r); f(r) = \frac{c}{r^3}$, donde c es una constante. 4430. a) $u \Delta u + (\text{grad } u)^2$, b) $u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v$, donde Δu es el operador de Laplace. 4431. div $v = 0$; div $w = -2\omega^2$. 4432. O, fuera de los centros de atracción.

4433. $\text{div } a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$, donde a_r, a_φ son las proyecciones del vector a sobre las curvas coordenadas φ = const y r = const. 4434.

4434. $\text{div } a = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MN a_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NL a_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LM a_w)\right]$, donde a_u, a_v, a_w son las proyecciones del vector a sobre las curvas coordenadas correspondientes y $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$, $N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Si r, φ, z son las coordenadas cilíndricas, entonces $\text{div } a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; si r, θ, φ son las coordenadas esféricas, entonces $\text{div } a = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r \sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$.

4436. a) 0; b) 0. 4436.1. $\text{rot } a(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$, $|\text{rot } a(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. 4437. a) $\frac{f'(r)}{r}[r \times c]$; b) $2f(r)c + \frac{f'(r)}{r}[c(r \cdot r) - r(c \cdot r)]$. 4439. a) 0; b) 0. 4440. rot $v = 2\omega$.

4440.1. $\text{rot } a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]k$, donde a_φ y a_r son las proyecciones del vector a sobre las curvas coordenadas respectivas r = const y φ = const.

4440.2. a) $\text{rot } a = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]e_z$, donde $a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$, $a_z = a_z$; b) $\text{rot } a = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]e_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right]e_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]e_\varphi$, donde $a_r = a_x \cos\varphi \sin\theta + a_y \sin\varphi \sin\theta + a_z \cos\theta$, $a_\theta = a_x \cos\varphi \cos\theta + a_y \sin\varphi \cos\theta - a_z \sin\theta$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$. 4441. a) 0; b) πh^2. 4442. a) 0; b) 0. 4443. π. 4444. $\frac{3\pi}{8}$. 4445. 0. 4445.1. $\frac{\pi}{5}$. 4447. $4\pi m$.

4448. $\sum_{i=1}^{n} e_i$. 4450. $c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } u)$, donde c es la capacidad calorífica específica y ρ es la densidad del cuerpo.

4452. $2\pi^2 b^2$. 4452.1. $8\frac{20}{21} \cdot \ln 2$. 4452.2. $\frac{3}{4}(3 + e^4 - 12e^{-2})$. 4453. $\int_{r_A}^{r_B} f(r)\, r\, dr$.

4454. a) 2π; b) 2π. 4455. a) $\Gamma = 0$; b) $\Gamma = 2\pi n$, donde n es el número de vueltas del circuito C en torno del eje Oz. 4455.1. $\text{rot } a(M) = -j - 2k$, $\Gamma = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2$. 4456. $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$, $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. 4457. $u = xyz(x + y + z) + C$.

4457.1. $\frac{1}{3}$. 4458. $u = \frac{m}{r}$. 4459. $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}$, donde r_i es la distancia del punto variable $M(x, y, z)$ al punto M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

4660. $u(x, y, z) = \int_{r_0}^{r} t f(t)\, dt$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

APENDICES

I. CONSTANTES IMPORTANTES

$\pi=3,1415926536$

$\frac{1}{\pi}=0,3183098862$

$\pi^2=9,8696044011$

$\sqrt{\pi}=1,7724538509$

$e=2,7182818285$

$\frac{1}{e}=0,3678794412$

$e^2=7,3890560989$

$\sqrt{e}=1,6487212707$

$M=\lg e=0,4342944819$

$\frac{1}{M}=\ln 10=2,3025850930$

1 radián $=57°17'44,806''$

arc $1°=0,01745\ 32925$

II. TABLAS

1. Valores inversos. Raíces cuadráticas y cúbicas. Función exponencial

n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$e^{\frac{n}{10}}$	$e^{-\frac{n}{10}}$	e^{-n}
1	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,718	1,105	0,905	0,368
2	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,389	1,221	0,819	0,135
3	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,350	0,741	0,0498
4	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,492	0,670	0,0183
5	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,41	1,649	0,607	0,00674
6	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	403,4	1,822	0,549	$2,45\cdot10^{-3}$
7	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1096,6	2,014	0,497	$9,12\cdot10^{-4}$
8	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2981	2,226	0,449	$3,35\cdot10^{-4}$
9	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	8103	2,460	0,407	$1,23\cdot10^{-4}$
10	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	22026	2,718	0,368	$4,54\cdot10^{-5}$

2. Mantisas de los logaritmos decimales

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	000	301	477	602	699	778	845	903	954
10	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
20	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
30	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
40	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
50	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
60	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
70	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
80	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949
90	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

3. Logaritmos naturales

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079	2,197
10	2,303	2,398	2,485	2,565	2,639	2,708	2,773	2,833	2,890	2,944
20	2,996	3,045	3,091	3,135	3,178	3,219	3,258	3,296	3,332	3,367
30	3,401	3,434	3,466	3,497	3,526	3,555	3,584	3,611	3,638	3,664
40	3,689	3,714	3,738	3,761	3,784	3,807	3,829	3,850	3,871	3,892
50	3,912	3,932	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,078
60	4,094	4,111	4,127	4,143	4,159	4,174	4,190	4,205	4,220	4,234
70	4,248	4,263	4,277	4,290	4,304	4,318	4,331	4,344	4,357	4,369
80	4,382	4,394	4,407	4,419	4,431	4,443	4,454	4,466	4,477	4,489
90	4,500	4,511	4,522	4,533	4,543	4,554	4,564	4,575	4,585	4,595
100	4,605	4,615	4,625	4,635	4,644	4,654	4,663	4,673	4,682	4,691

Logaritmos naturales de $10^{\pm n}$

n	+	−	n	+	−	n	+	−
1	2,3026	$\bar{3},6974$	3	6,9078	$\bar{7},0922$	5	11,5129	$\overline{12},4871$
2	4,6052	$\bar{5},3948$	4	9,2103	$\overline{10},7897$	6	13,8155	$\overline{14},1845$

4. Funciones hiperbólicas

x	sh x	ch x	th x	x	sh x	ch x	th x
0	0	1	0				
0.1	0,100	1,005	0,100	1,6	2,376	2,578	0,922
0,2	0,201	1,020	0,197	1,7	2,646	2,828	0,935
0,3	0,305	1,045	0,291	1,8	2,942	3,107	0,947
0,4	0,411	1,081	0,380	1,9	3,268	3,418	0,956
0,5	0,521	1,128	0,462	2,0	3,627	3,762	0,964
0,6	0,637	1,185	0,537	2,1	4,022	4,144	0,970
0,7	0,759	1,255	0,604	2,2	4,457	4,568	0,976
0,8	0,888	1,337	0,664	2,3	4,937	5,037	0,980
0,9	1,027	1,433	0,716	2,4	5,466	5,557	0,984
1,0	1,175	1,543	0,762	2,5	6,050	6,132	0,987
1,1	1,336	1,669	0,801	2,6	6,695	6,769	0,989
1,2	1,509	1,811	0,834	2,7	7,406	7,473	0,991
1,3	1,698	1,971	0,862	2,8	8,192	8,253	0,993
1,4	1,904	2,151	0,885	2,9	9,060	9,115	0,904
1.5	2,129	2,352	0,905	3,0	10,018	10,068	0,995

Para $x > 3$, con un error menor que 0,05, se tiene sh $x \approx$ ch $x \approx \frac{1}{2} e^x$.

5. La función factorial y funciones relacionadas con la misma

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$1/n!$	$1/(2n-1)!!$	$1/(2n)!!$
1	1	1	2	1	1	0,5
2	2	3	8	0,5	0,333 333 333	0,125
3	6	15	48	0,166 666 667	0,066 666 667	0,020 833 33
4	24	105	384	0,041 666 667	0,009 523 810	0,002 604 167
5	120	945	3 840	0,008 333 333	0,001 058 201	0,000 260 417
6	720	10 395	46 080	0,001 388 889	0,000 096 200	0,000 021 701
7	5 040	135 135	645 120	0,000 198 413	0,000 007 400	0,000 001 550
8	40 320	2 027 025	10 321 920	0,000 024 802	0,000 000 493	0,000 000 097
9	362 880	34 459 425	185 794 560	0,000 002 756	0,000 000 029	0,000 000 00
10	3 628 800	654 729 075	3 715 891 200	0,000 000 276	0,000 000 002	0,000 000 00

6. Funciones trigonométricas

α°	α = arc α° (radianes)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		cos α	ctg α	tg α	sin α	α (radianes)	α°

7. Función Gamma

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Gamma(x)$	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,886	0,894	0,909	0,931	0,962	1,000

Para $x > 0$, $\min \Gamma(x) = \Gamma(1{,}4616) = 0{,}8856$.